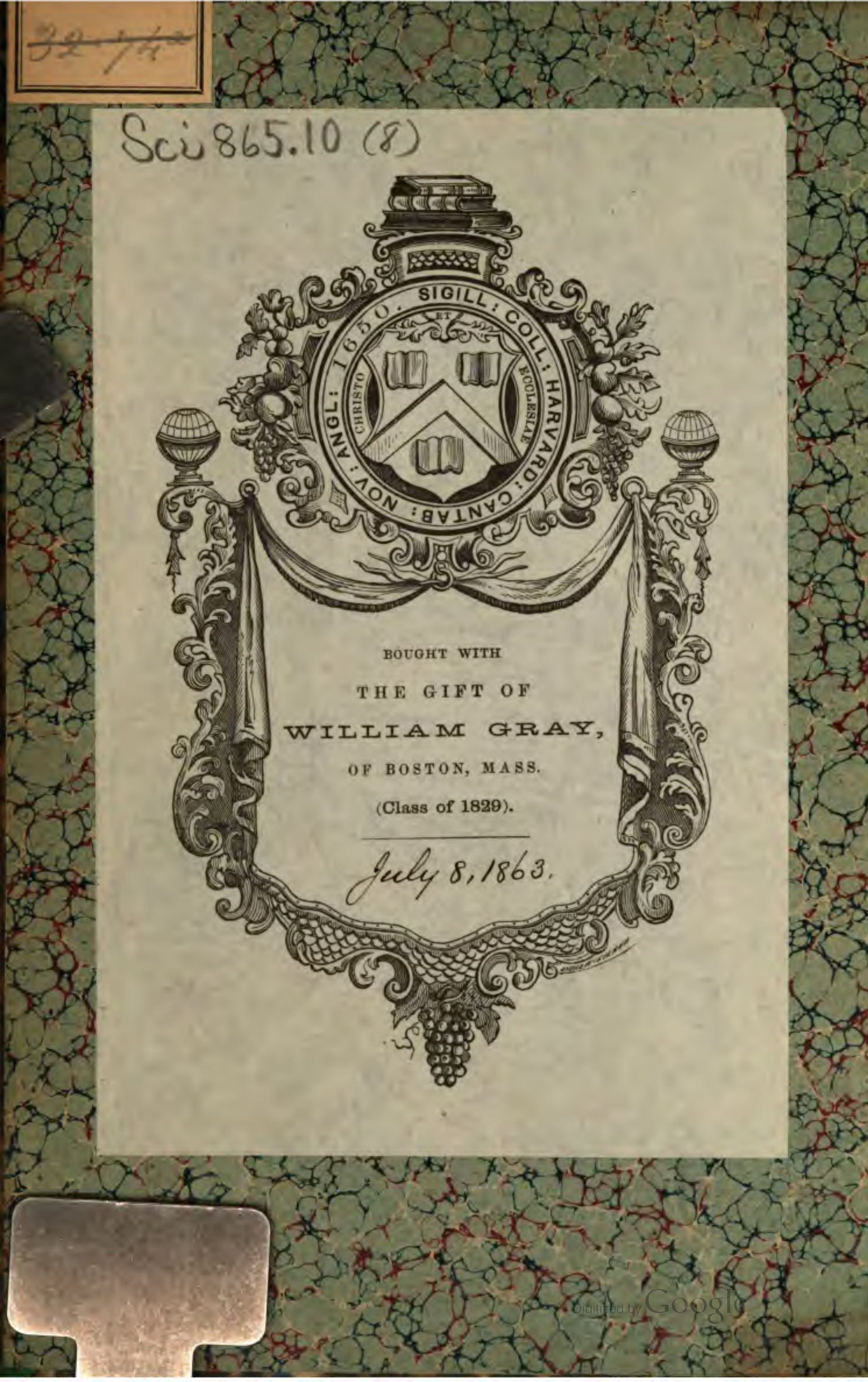
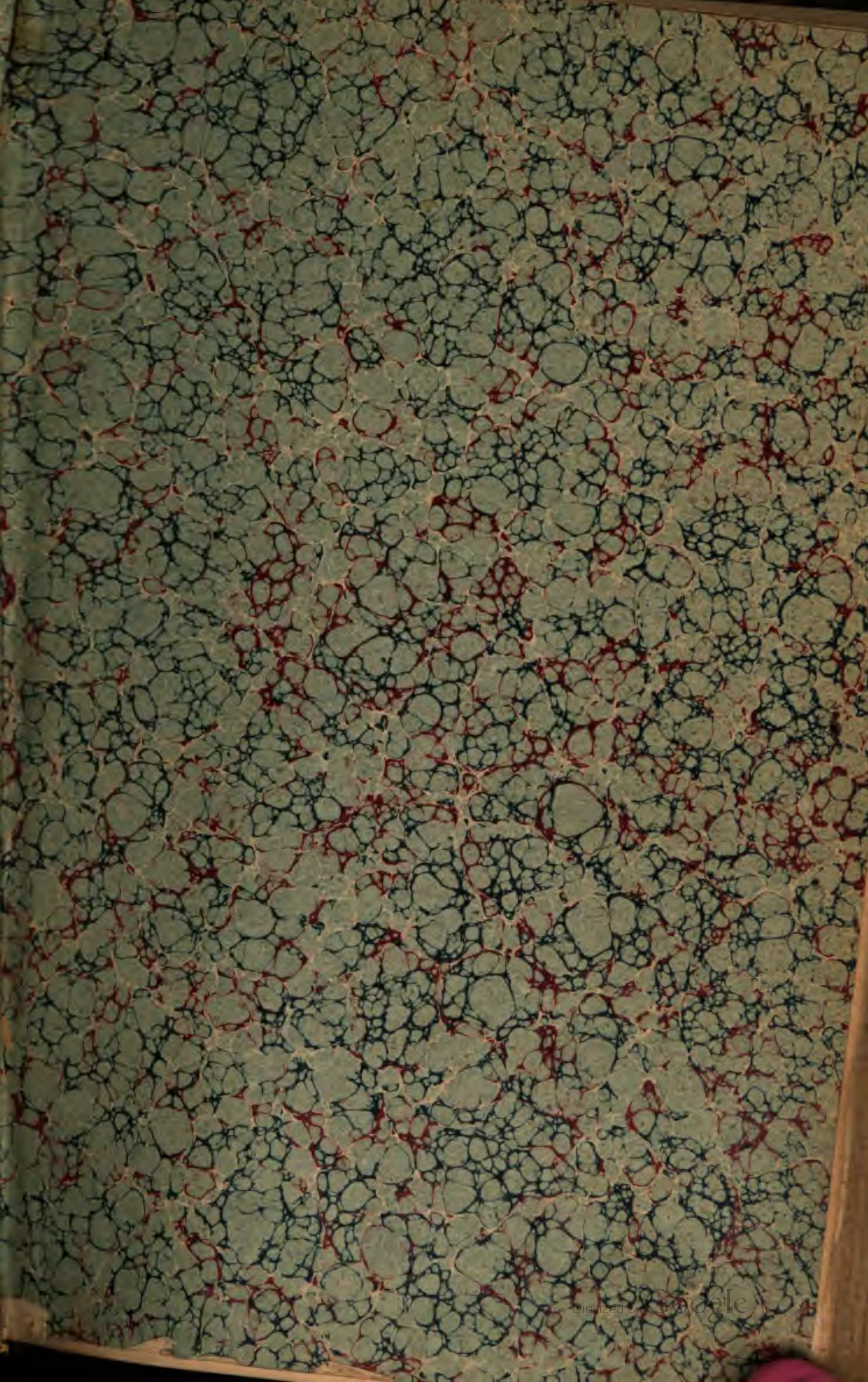


Sci 865.10 (8)
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
July 8, 1863.
Digitized by Google



CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

Imperf. see p. 344.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE

DE

L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

Directeur de l'observatoire de Bruxelles; professeur au musée; membre de l'académie des sciences et belles-lettres, et de l'institut des Pays-Bas; associé libre étranger de la société de statistique de Paris, de la société philomathique de la même ville, de la société royale astronomique de Londres, des académies royales de Berlin et de Turin; des sociétés des sciences naturelles et médicales de Heidelberg et de Wurzbourg; des sociétés de Gand, Liége, Rotterdam, La Haye, Utrecht, Cambrai.

—

TOME DEUXIÈME.

BRUXELLES.

SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE

HAUMAN ET C°.

—

1835

1865, July 8.

TABLE

DES MATIÈRES DU HUITIÈME VOLUME.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Géométrie.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

Géométrie.

Analyse.

Mécanique.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Astronomie.

Physique.

Météorologie.

STATISTIQUE.

HISTOIRE DES SCIENCES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

Notes extraites d'un voyage en Angleterre aux mois de juin et de juillet 1833, par M. QUETELET.

RÉUNION GÉNÉRALE DES SAVANS ANGLAIS A CAMBRIDGE.

L'association britannique pour l'avancement des sciences, *the British association for the advancement of science*, prit naissance à York; et la première réunion date de l'année 1831. Celle qui suivit, eut lieu à Oxford, et dépassa par ses résultats toutes les espérances des fondateurs. La troisième réunion qui vient d'avoir lieu à Cambridge, a été peut-être plus remarquable encore, et formera certainement époque dans les annales des sciences en Angleterre (1). Cette réunion a commencé le 24 juin et a duré pendant une semaine. Douze cents personnes environ y ont pris part, et l'on comptait parmi elles à peu près tous les savans anglais les plus distingués. Les étrangers étaient peu nombreux ; et cette circonstance tient peut-être à ce que l'épo-

(1) Cette réunion remarquable, fut présidée avec talent par *M. Segwick* géologue d'un mérite distingué; les vices-présidens étaient, *MM. Airy* et *Dalton;* les secrétaires *MM. Henslow* et *Whewell;* le président sortant, était le célébre géologue *Buckland;* et le président désigné pour l'année prochaine, est M. l'amiral *Brisbane*, le fondateur du nouvel observatoire construit à la Nouvelle-Hollande.

que de la réunion n'était pas assez reculée pour permettre à la plupart des savans du continent et surtout aux professeurs des universités, de venir y prendre part; nul doute qu'on ne rende leur concours plus considérable l'année prochaine à Édimbourg, en fixant, comme on l'a fait, l'époque de la réunion vers le commencement de septembre.

Les admissions aux conférences avaient lieu d'après les principes les moins restrictifs. Toute personne ayant communiqué à une société scientifique, des recherches imprimées dans les actes de cette société, de même que les personnes envoyées en députation par des sociétés scientifiques provinciales, pouvaient assister de droit, après avoir été inscrites, aux conférences comme membres de l'association.

L'inscription se faisait devant un comité directeur. Le prix de l'inscription pour les membres était d'une livre sterling.

Les savans étrangers, recommandés par un membre de l'association, étaient inscrits gratuitement.

Les conférences étaient *générales* ou *spéciales*.

Les *conférences générales* avaient lieu dans la salle du sénat académique. On y traitait les questions d'un intérêt général, on y faisait des rapports sommaires sur les travaux des *sections*, des rapports élaborés sur l'avancement de certaines branches des sciences, qui avaient été demandés l'année précédente à des savans particulièrement versés dans ces sciences, etc.

Les *conférences spéciales*, ou les *sections*, avaient été distribuées d'après la nature des sciences et avaient lieu simultanément dans des locaux séparés. Ces sections étaient au nombre de cinq, et pendant la réunion, on en forma une sixième dont j'aurai occasion de parler bientôt.

Les cinq sections étaient composées de la manière suivante :

1re *Section.*

Section des sciences mathématiques et physico-mathématiques (astronomie, mécanique, hydrostatique, hydraulique, lumière, chaleur, son, météorologie et arts mécaniques).

2e *Section.*

Section de chimie, électricité, galvanisme, magnétisme, minéralogie, arts chimiques et manufactures.

3e *Section.*

Section de géologie et géographie.

4e *Section.*

Section d'histoire naturelle (botanique, zoologie et physiologie végétale).

5e *Section.*

Section de physiologie animale, anatomie et médecine.

Du reste chaque section pouvait se sous diviser à son gré ou s'unir à une autre; elle avait aussi le droit de choisir son président, un vice-président et deux secrétaires. Ces secrétaires étaient chargés de réunir les notes et documens nécessaires pour faciliter aux secrétaires de l'association la rédaction du rapport général.

Pendant les conférences des sections, avaient lieu les communications spéciales et les annonces soit écrites, soit verbales de découvertes récentes, de recherches, de résultats de recherches, de solutions expérimentales de questions controversées, l'indication de points importans à examiner, les renseignemens sur les progrès des sciences dans d'autres pays et des observations orales sur ces communications.

Il me serait impossible de rendre compte de tous les travaux qui ont été présentés soit dans les conférences générales soit dans les sections; ni le temps ni la nature de mes études ne m'auraient permis de suivre tant de communications diverses. Pour se faire une idée de leur importance, il suffit de jeter les yeux sur le volume qui contient les rapports de l'association

britannique faits à la réunion (1), qui a eu lieu l'année précédente à Oxford. On y trouvera, à côté des communications les plus instructives et les plus diverses, des rapports pleins d'intérêt sur l'histoire et les progrès de certaines branches des sciences dans ces derniers temps.

De pareils rapports ont encore eu lieu cette année et spécialement sur les objets suivans :

Sur l'état de nos connaissances relativement au magnétisme terrestre, par *M. Christie ;*

Sur l'état actuel de la théorie analytique de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique, par *M. Challis ;*

Sur l'état de nos connaissances en hydraulique considérée comme une branche de la science de l'ingénieur, par *M. G. Rennie ;*

Sur l'état de nos connaissances, quant à la force des matériaux, par *M. Barlow* (2);

Sur l'état de nos connaissances, quant aux veines minérales, par *M. John Taylor.*

Dans l'impossibilité ou je suis, de présenter un tableau complet des travaux des savaus anglais à Cambridge, je tâcherai de présenter au moins un aperçu de quelques sujets qui ont fixé l'attention dans la section des sciences physiques où j'ai plus particulièrement assisté. Il pourra donner une idée plus juste de la manière de procéder.

Ce comité avait pour secrétaire *M. Forbes*, et était présidé par *M. Peacock*, dont les efforts unis à ceux de *MM. Herschel, Babbage* et *Whewell,* ont le plus contribué à répandre en Angleterre la notation moderne et les nouvelles méthodes analytiques.

---

(1) *Reports of the british association, etc.,* 1831-1832, 1 vol. in-8° 624 pag. *Londres, John Murray*, 1833.

(2) *M. Barlow*, qu'une indisposition avait empêché d'assister à la réunion, avait envoyé son rapport en y joignant un fragment de poutre qui, en se rompant, avait présenté dans sa fracture des circonstances toutes particulières.

Aurores boréales, étoiles filantes.

La première séance fut presqu'entièrement consacrée à des descriptions d'aurores boréales et à des remarques très-intéressantes sur ces brillans météores, que firent successivement *MM. Dalton*, *Airy*, *Potter*, *Scoresby*, *Robinson*, etc. On s'occupa particulièrement de déterminer les différentes circonstances qui doivent fixer l'attention des observateurs pendant le phénomène; et il s'éleva accidentellement une discussion très-animée au sujet du bruissement qui, selon quelques observateurs, accompagne assez souvent l'apparition des aurores boréales. *M. Scoresby*, dont les voyages dans les régions polaires sont bien connus, était entièrement d'avis que ces bruissemens n'étaient que des illusions; des personnes présentes à la séance assurèrent au contraire les avoir distinctement entendus.

Cette discussion soutenue vivement par des hommes aussi distingués et dans un pays où les aurores boréales sont fréquentes, devenait du plus haut intérêt parce qu'elle résumait en quelque sorte l'état de nos connaissances sur ces météores. Elle conduisit naturellement à conclure qu'il fallait des observations nouvelles et qu'on les multiplierait le plus possible pour pouvoir avec précision déterminer toutes les circonstances du phénomène. Il est assez remarquable que le nombre des aurores boréales, ait très-sensiblement diminué dans nos climats : l'abbé *Chevalier* et l'abbé *Mann* qui faisaient à Bruxelles des observations météorologiques pour la société palatine de *Manheim*, il y a 50 ans, en ont compté jusqu'à 24 par année, tandis qu'actuellement on en observe tout au plus une ou deux pendant une même période de temps.

Il fut aussi question des étoiles filantes, autre phénomène non moins intéressant et peut-être moins étudié que le précédent, quoiqu'il se présente bien plus fréquemment. Il en fut encore parlé dans la seconde séance. Des recherches nombreuses que j'avais faites sur ces météores pour en déterminer la

hauteur, la vitesse de translation, etc (1), me permirent de prendre part à cette nouvelle discussion, et d'appeler l'attention des physiciens sur son importance. *M. Herschel* appuya fortement cet avis, en faisant valoir l'utilité dont pouvait être l'étude de ces météores et particulièrement pour la détermination des longitudes. *M. Robinson*, directeur de l'observatoire d'Armagh, assura de son côté qu'il s'était déjà servi avec succès de ce moyen d'observation.

Une grande partie de la seconde séance fut consacrée à un sujet de recherche non moins digne d'attention, particulièrement en Angleterre; il fut question de la forme la plus avantageuse à donner aux vaisseaux : ce sujet donna lieu à une discussion très-variée à laquelle prirent part *MM. Challis, Lardner, Robinson, Baily*, etc. Quelques physiciens parlèrent surtout de l'insuffisance de l'analyse, dans l'état actuel de la science, pour parvenir à la solution d'un problème aussi complexe.

Optique.

L'Optique eut une large part dans les séances qui suivirent, et l'on entendit successivement sur ce sujet important, *MM. Herschel, Brewster, Airy, Hamilton, Lloyd, Powell, Potter*, etc. Grâce à l'obligeance de la plupart de ces savans physiciens, et aux communications qu'ils ont bien voulu me faire, j'ai pu profiter de leurs recherches pour la rédaction des

---

(1) Je fus assez heureux pour pouvoir entretenir de ces recherches l'illustre *Laplace* quelques années avant sa mort. « Ainsi nous pouvons assigner, disait ce grand philosophe, le mouvement des planètes dans l'espace; nous calculons les orbites des comètes; nous déterminons, après une courte apparition, leurs retours qui souvent ne doivent avoir lieu qu'à des époques très-reculées, et nous n'avons encore aucune notion exacte sur la nature de ces météores qui se reproduisent à tout instant, sous nos yeux, seulement à quelques lieues de distance. »

M. Brandès, en ce moment, renouvelle en Allemagne les observations qu'il a déjà faites sur ces météores.

notes qui seront jointes à la traduction du *Traité de la Lumière*, de *M. Herschel* (1).

M. Potter commença par exposer les résultats auxquels il avait été conduit par ses recherches sur l'intensité de la lumière réfléchie à la surface des corps. Ce physicien a déduit de ses observations que, quand la réflexion a lieu à la surface des *métaux* et que l'on prend le sinus d'incidence de 100 rayons pour abscisse d'un système de coordonnées rectangulaires, l'ordonnée représentant les rayons réfléchis est celle d'une *ligne droite*. Ainsi, dans l'équation $y = ax + b$, pour un miroir de métal, y est la lumière réfléchie, a est la tangente trigonométrique de $355°12'$, $b' = 72.3$ et x est le sinus d'incidence de 100 rayons. Quand la réflexion a lieu sur des corps *transparens*, l'équation précédente devient celle d'une *hyperbole*, et prend cette forme :

$$y = a + \frac{c}{r + b - x};$$

a, b, c sont des constantes qu'on détermine par des expériences, et $r = 100$. La communication faite par *M. Potter* à Cambridge, avait particulièrement pour objet de montrer la coïncidence des résultats calculés par la formule avec ceux que lui avait fournis l'expérience pour le verre d'antimoine.

En discutant la valeur de ces observations, on fut accidentellement conduit à parler du nouveau photomètre que l'auteur avait imaginé. *M. Ritchie*, à qui l'on doit aussi un photomètre bien connu, présenta des remarques intéressantes sur la sensibilité de l'organe de la vue (2) et sur les erreurs auxquelles on peut être exposé.

---

(1) L'impression de la traduction qui est plus particulièrement due à *M. Verhulst*, est actuellement achevée.

(2) Je me rappelle à ce sujet qu'étant entré chez *M. Gartner*, dont l'établissement à Londres est bien connu des géographes, je le trouvai très-occupé de montrer à quelques personnes que la main avait plus de

M. Herschel lut une note sur l'absorption de la lumière, dont il a bien voulu nous promettre un extrait. Il répéta aussi avec le plus grand succès une expérience sur l'interférence des rayons sonores, expérience qu'il a indiquée dans son article sur l'acoustique de *l'encyclopédie métropolitaine*, et qui consistait à faire vibrer deux diapasons parfaitement à l'unisson au-dessus d'un verre cylindrique d'environ deux décimètres de hauteur et de moins d'un demi-décimètre d'ouverture. Au fond du verre était une petite couche d'eau; les diapasons en vibrant successivement au-dessus du verre, donnaient un son continu; et quand ils vibraeint simultanément, on entendait des intermittences très-rapprochées et très-distinctes.

M. Hamilton présenta les principaux résultats sur la réfraction conique, auxquels il a été conduit par ses vues ingénieuses et par son élégante analyse; et M. le professeur *Lloyd* fit part du résultat de ses observations qui confirment pleinement ce que *M. Hamilton* a trouvé par ses formules.

Dans une réunion particulière à laquelle j'assistais avec *MM. Herschel*, *Brewster*, *Powell*, *Christie*, etc. *M. Wheatstone* fit voir une expérience très-ingénieuse; elle avait pour objet de reconnaître si l'apparition d'une lumière est instantanée, ou si elle a une durée appréciable, et dans ce dernier cas, de mesurer cette durée. Il s'agit par exemple de savoir si une étincelle électrique a une durée appréciable. A cet effet, *M. Wheatstone* prend un cercle de carton qu'il partage par des rayons en plusieurs secteurs qu'il rend alternativement blancs et noirs; il fait tourner ensuite ce cercle dans son plan autour d'un axe fixe, et il résulte de ce mouvement de rotation que la surface du cercle paraît grisâtre par suite de la durée des impressions que la lumière laisse sur la rétine. Cela posé, si le cercle est mis en mouvement dans une chambre parfaitement

---

sensibilité que l'œil Sa démonstration consistait en ce qu'il traçait à la main et avec une simple règle des lignes si rapprochées et si fines, que l'œil ne pouvait les distinguer et les compter qu'au moyen de la loupe.

obscure, et s'il est subitement éclairé par une étincelle électrique ou par la décharge d'une bouteille de Leyde, on verra très-distinctement les secteurs blancs et noirs comme si ce cercle était dans une immobilité complète, malgré toute la rapidité de rotation qu'on peut lui donner. Il faut donc en conclure que le cercle n'a été éclairé que pendant un instant infiniment court. L'impression sur la rétine est assez vive néanmois, et se prolonge assez pour rendre très-distincte l'image du cercle. On conçoit que si l'étincelle électrique avait une durée appréciable, on verrait le cercle tournant dans plusieurs positions successives, et il deviendrait impossible de distinguer son image avec netteté.

La nature de ces recherches, qui reposent sur la durée de la vision, me donna occasion de parler des recherches faites en Belgique, par *M. Plateau*, qui, en donnant suite à des expériences très-curieuses de *MM. Roget* et *Faraday*, a construit le petit instrument très-ingénieux qu'il a nommé *phantascope*, et qui a été imité depuis en France d'une manière très-imparfaite, sous le nom de *phénakisticope*, et à Londres sous celui de *phantasmascope*.

Magnétisme.

Le magnétisme ne fut point négligé; on exprima en particulier le désir de voir se multiplier les observations sur l'inclinaison et l'intensité de la force de l'aiguille magnétique, observations qui sont malheureusement encore très-rares. *M. Christie* de Woolwich fit sentir l'importance des corrections, et spécialement de celles qui concernent l'inégalité de la température, sujet dont il s'est récemment occupé. Il fut aussi question de l'inégalité de la force magnétique, que *M. Kuppfer* croit avoir reconnue entre le sommet et la base des montagnes contrairement à des observations antérieures, que j'ai eu occasion de vérifier dans les Alpes, avec *M. Necker Saussure*, qui a bien voulu y prendre part; et que *M. Forbes* a également vérifiées depuis, mais dont les résultats n'ont pas encore été

publiés. Ce genre de recherches a été spécialement recommandé à l'attention des physiciens. Je crois qu'il ne serait pas moins intéressant de vérifier un résultat assez remarquable, que *M. Necker* a déduit de mes observations; c'est que l'intensité magnétique ne présente guères d'anomalies quand on l'observe sur des volcans éteints; tandis que le contraire est extrêmement sensible sur des volcans en action; d'où semblerait résulter que ces anomalies sont dues à des actions chimiques.

J'ai profité de mon séjour en Angleterre, pour vérifier les observations sur l'intensité relative des forces magnétiques à Paris, Londres et Bruxelles, que M. le capitaine *Sabine* a bien voulu me communiquer dans le temps. Je crois que *M. Forbes* a répété de son côté les mêmes observations, qui donneront un moyen précieux de contrôle. *M. Snow Harris* se proposait aussi de déterminer les différences entre Cambridge, Londres et Plimouth.

M. Snow Harris, dont je regrette de ne pouvoir faire connaître ici les appareils très-ingénieux pour le magnétisme et l'électricité, afin de s'assurer de l'horizontalité des aiguilles, les suspend au-dessus d'un liquide et cherche ensuite à amener le parallélisme entre l'aiguille et son image.

On agita aussi la question encore très-douteuse du degré de précision qu'on peut obtenir avec des instrumens magnétiques; des physiciens doutaient, par exemple, qu'on pût obtenir avec exactitude l'inclinaison, à moins d'un quart de degré, d'autres citèrent des observateurs qui croyaient pouvoir la donner avec une exactitude d'une demi-minute. Il n'est pas sans intérêt de connaître ces espèces de limites qui existent dans l'opinion des savans, et qui donnent une mesure de l'état actuel de la science et des arts mécaniques. *M. Scoresby*, présenta une boussole de déclinaison avec un assemblage de cercles destinée, à remplacer les instrumens astronomiques dans bien des cas pour déterminer les élémens de situation en mer; M. l'amiral *Brisbane* insista avec lui sur les grands avantages que présente l'instrument.

Ceci me conduit naturellement à parler d'un globe, que

M. Barlow a bien voulu me montrer à Woolwich, et sur lequel ce savant avait tracé des lignes indiquant les lieux qui présentent la même déclinaison de l'aiguille, d'après les observations les plus récentes. Les côtes paraissaient avoir dans les écarts une influence assez marquée; je fus frappé le lendemain de voir chez *M. Baily*, les résultats des observations du pendule que M. le capitaine *Forster* a laissées, et qui viennent d'être calculées, offrir avec le calcul des discordances à peu près semblables.

M. Baily, qui m'a montré avec la plus grande obligeance les papiers du capitaine *Forster*, m'a fait remarquer un résultat curieux, qui se trouve à la vérité fondé sur peu d'observations, mais qui, par cela même, mérite d'autant plus d'être vérifié, c'est que le pendule oscillant dans le plan du méridien magnétique, et perpendiculairement à ce plan, ne lui a pas donné les mêmes valeurs.

Je ne puis m'empêcher de mentionner aussi un fait assez curieux que j'ai observé à Londres chez *M. Watkins*, et que *M. Christie* a constaté par ses propres expériences; c'est que des morceaux de fer très-doux, après avoir acquis le magnétisme par induction, avaient conservé encore toute leur force, quinze jours et d'autres même un mois après avoir été soumis au courant électrique; mais, après la séparation de la charge, toute leur faculté avait à peu près disparu. J'ai eu occasion de m'en entretenir assez longuement avec *M. Christie*, sans en trouver de cause bien plausible. Je regrette maintenant de ne pas avoir examiné avec soin les parties où avait lieu le contact, et vérifié si les surfaces rapprochées et unies d'abord par la force magnétique, n'étaient pas restées adhérentes ensuite comme le seraient des plateaux de Magdebourg.

Les observations magnétiques furent encore recommandées, pendant les aurores boréales, et l'on demanda même de les comprendre autant que possible dans toutes les observations météorologiques. Sans nier la grande utilité des observations faites dans cette vue, je pense qu'on tirerait beaucoup plus de profit d'observations suivies sur la nature et l'intensité de

de l'électricité atmosphérique, que je regarderais volontiers comme un des élémens les plus importans à considérer ; c'était aussi l'avis de *M. Herschel*. J'ai vû depuis à Paris les appareils que *M. Arago* a destinés à cet effet, et qu'il a observés avec un soin qui sans doute vaudra à la science de nouvelles découvertes.

M. Brunel, dans une conversation particulière, communiqua le détail des observations qu'il a faites avec *M. Faraday*, sur l'emploi de la force expansive de l'acide carbonique rendu gazeux; observations encore trop peu connues de ceux qui cherchent à employer cette substance dans les machines au lieu de la vapeur d'eau. Ces expériences, qui furent conduites avec beaucoup de soin, ont montré que le gaz finit par perdre peu à peu de sa force élastique. *M. Brunel* a eu l'obligeance de me montrer à Londres les dessins des appareils dont il s'était servi.

Marées.

On avait recommandé, l'année précédente, à l'attention des savans, les observations sur les marées. *M. Whewell* qui vient d'insérer dans les *Transactions philosophiques* de Londres, un mémoire très-intéressant sur ce sujet, qui a également beaucoup occupé *M. Lubbock*, a fait un rapport remarquable dans lequel il a résumé ce que la science a pu réunir jusqu'à ce jour.

Il serait très-utile de recueillir à Anvers et à Ostende, les observations qu'on y fait sans doute sur les marées, afin de pouvoir les communiquer aux savans anglais qui ont témoigné le désir de les connaître. Si des personnes zélées pour l'avancement des sciences, consentaient, chez nous, à prendre part aux observations qui ont actuellement lieu sur un même plan et dans plusieurs localités, je communiquerais volontiers les instructions qui m'ont été données à cet effet, et en particulier par *M. Whewell*, qui est chargé de recueillir les renseignemens qu'on voudra bien destiner à l'association.

Les frais de l'inscription annuelle des membres, quoique faibles, avaient produit une somme assez forte depuis la naissance de l'association; et on résolut de l'utiliser en l'appli-

quant par parties à des encouragemens de travaux pénibles mais utiles, tels que les observations sur les marées, les calculs de réduction d'anciennes observations astronomiques encore inédites, etc. On proposa aussi une prime pour l'assemblage des constantes d'après l'idée de *M. Babbage.*

Des constantes et de la machine à calculer de M. Babbage.

Ce savant a exprimé depuis long-temps le désir de voir former une espèce de répertoire où serait enregistré tout ce qui est susceptible d'être mesuré; ainsi, par exemple, la pesanteur spécifique des corps, la dilatation linéaire des métaux, la grandeur des animaux, celle de leurs ossemens, leur poids, la quantité d'air qu'ils respirent, de nourriture qui leur est nécessaire, etc.; sujet immense, surtout si l'on y faisait entrer pour les êtres vivans la considération de l'âge, comme j'ai essayé de le faire pour l'espèce humaine. Le cadre que je me suis tracé, pour l'homme seulement, est si vaste, que je n'espère point, même avec le concours de plusieurs amis, de pouvoir jamais présenter plus qu'une esquisse du travail que j'ai eu en vue. Du reste, je pense qu'il ne faut point renoncer à un sujet de recherches quelque vaste qu'il soit, dès qu'il en peut résulter de l'utilité. Le temps est un élément de solution qui vient à bout des recherches les plus pénibles; et si nos efforts sont dirigés dans un sens convenable, nos descendans achèveront ce que nous n'avons pu faire.

M. Babbage, qui ne recule pas devant les entreprises les plus gigantesques, est l'inventeur de la célèbre machine à calculer, commencée avec des frais considérables depuis plusieurs années, mais que l'auteur ne verra probablement jamais terminée sur le plan immense qu'il a conçu. La machine, dans son état actuel, fonctionne néanmoins avec facilité, et suffit pour faire comprendre les idées de l'inventeur. Je dois à l'amitié qui m'unit depuis long-temps à *M. Babbage*, d'avoir vu à Londres, à plusieurs reprises et dans le plus grand détail, toutes les parties de la machine à calculer, et d'avoir pu me faire une

idée plus juste d'un travail dont j'avais souvent entendu parler, mais que très-peu de personnes connaissent dans ses détails. Cette machine est certainement très-compliquée ; il faut une extrême attention pour suivre le jeu de ses différentes parties ; aussi je n'entreprendrai pas de donner sa description qui occuperait sans doute un volume assez considérable, si l'on voulait avoir égard aux idées de l'inventeur, à l'extrême perfection du travail mécanique, et à tous les calculs mathématiques que la machine peut effectuer. En 1829, le comité des ingénieurs, dont *MM. Brunel, Donkin, Barton*, etc., faisaient partie, jugea que cet ouvrage était le plus parfait qu'ils eussent vu. Une des applications les plus utiles auxquelles on pourra l'employer sera la construction de tables de logarithmes, surtout avec les perfectionnemens imaginés par *M. Babbage*. La machine imprimera les logarithmes en même temps qu'elle les calculera, de sorte qu'on se trouverait à l'abri des erreurs de calcul, de copie ou d'impression. Il pourrait se faire à la vérité que pendant qu'elle fonctionne, une dent de roue vînt à se briser, et que par suite il se fît une erreur, mais comme cette erreur se transporterait dans tous les résultats subséquens, il serait impossible de ne pas la reconnaître en vérifiant le résultat final.

Statistique.

Les recherches de statistique ont également occupé *M. Babbage*, et comme cette science n'était pas comprise au nombre de celles dont les comités avaient à s'occuper à Cambridge, nous nous réunîmes d'abord pour en parler avec *MM. Malthus* et *Jones*, dont j'avais eu l'honneur de faire la connaissance. Quelques personnes témoignèrent le désir de prendre part à ces conférences toutes particulières, qui reçurent bientôt une extension telle que l'association reconnut, en séance générale, un sixième comité pour la statistique, mais en resserrant cette science dans sa partie purement numérique. On avait désigné *M. Malthus*, pour présider le comité, mais sur l'invitation de cet illustre savant, *M. Babbage* fut proclamé à sa place, et *M. Drink-*

Water secrétaire en permanence, chargé de recevoir les communications faites au comité.

L'attention se porta d'abord, dans le comité de statistique, sur la nécessité d'avoir des documens exacts sur la population ; et il faut en convenir, ce besoin est vivement senti en Angleterre, spécialement pour tout ce qui concerne les naissances. Aussi le parlement s'occupe en ce moment des moyens de donner de l'exactitude à cet élément statistique ; et il recueille avec soin tous les renseignemens qui peuvent l'éclairer sur ce point délicat. *M. Bowring* me proposa, à Londres, de me soumettre à un examen d'un comité du parlement, afin de donner des renseignemens sur le dénombrement qui a eu lieu, chez nous en 1829, et sur la tenue des registres de notre état civil ; je m'y soumis avec plaisir, heureux si je pouvais contribuer à faire prendre des mesures qui assurassent plus d'exactitude à un élément aussi important que celui de la population. Peu de pays, par leur position, par la nature de leurs limites et la tenue des registres de l'état civil, méritent autant que le nôtre d'être étudiés sous le rapport de la population. La Suède et la Suisse ont depuis long-temps fixé l'attention des savans, sous le même rapport. Les renseignemens que je fus à même de présenter à Cambridge, et l'assurance que je crus pouvoir donner que notre gouvernement se prêterait volontiers à faire toutes les recherches dont la science aurait besoin, porta à croire qu'on pourrait avec succès prendre notre royaume comme offrant toutes les conditions désirables pour servir de sujet d'études. Cet état de choses, dont nous serons les premiers à recueillir les fruits, sera sans doute apprécié, et j'ose croire que ce serait un des résultats les plus heureux de nos relations scientifiques avec l'Angleterre.

M. Malthus, en conséquence des propositions que je me crus autorisé à faire, voulut bien me remettre les questions suivantes, que je me suis empressé de communiquer depuis à M. le ministre de l'intérieur, qui a promis de faire réunir les élémens nécessaires pour y répondre d'une manière satisfaisante.

On demande :

Le nombre des naissances que produit chaque mariage pendant sa durée ;

Le nombre proportionnel d'enfans qui arrivent jusqu'à l'époque du mariage ;

Le nombre des enfans vivans par chaque mariage ;

Les salaires pour les manufactures et l'agriculture dans les différentes provinces, particulièrement le prix d'une journée moyenne de travail pour l'agriculteur ;

La quantité de froment que le prix d'une pareille journée peut produire dans les temps ordinaires ;

Le prix moyen des différentes espèces de grains ;

La nourriture habituelle du journalier ;

Le nombre proportionnel des mariages stériles ;

Le nombre proportionnel des mariages, ayant cinq ou plus d'enfans en vie.

Le comité exprima aussi le désir de connaître les mesures prises depuis 1815, par le gouvernement belge, pour la diminution de la mendicité.

Les réponses à ces questions seraient des matériaux précieux remis entre des mains habiles, qui les feraient valoir à notre profit.

Les hommes les plus versés dans les sciences politiques ont des conférences à Londres, où ils discutent sur les sujets de leurs études et s'éclairent mutuellement. Ces discussions toutes scientifiques, tout amicales, auxquelles assistent ordinairement vingt à trente personnes, ont lieu à la suite d'un banquet, et roulent généralement sur les questions politiques du jour. On a bien voulu m'admettre à l'une d'elles, où l'on examinait la question du travail imposé aux enfans dans les fabriques. A cette séance, assistaient plusieurs des économistes les plus distingués de l'Angleterre, tels que; *MM. Malthus*, *Senior*, *Tooke*, *Lewis*, *Whately*, *Babbage*, etc.; notre ministre plénipotentiaire à Londres, *M. Van de Weyer*, que ses fonctions n'ont pas détourné du sujet de ses premières études, fait aussi partie de cette association, et il assistait à la même séance.

Observatoires.

L'observatoire de Cambridge a fait plusieurs acquisitions précieuses depuis ma première visite en 1827; outre la grande lunette méridienne de dix pieds de distance focale, on y trouve maintenant un cercle mural de dix pieds de diamètre et un nouvel équatorial, d'une forme très-élégante, qui a été construit à Londres dans les ateliers de *MM. Troughton* et *Simms*. Cet équatorial, semblable en tout à celui que les mêmes artistes exécutent en ce moment pour l'observatoire de Bruxelles, est muni de deux cercles de trois pieds de diamètre; le cercle vertical est entre quatre colonnes cylindriques, qui s'appuient sur le cercle des heures, et sont placées dans la direction des pôles. Ces trois beaux instrumens mettent l'observatoire de Cambridge au rang des premiers observatoires de l'Europe; personne sans doute n'était mieux à même de faire valoir ce bel établissement que le directeur actuel, *M. Airy*, dont le nom est également distingué dans les différentes branches des sciences mathématiques.

L'observatoire royal de Greenwich, n'a pas reçu de changemens remarquables depuis plusieurs années; cependant le grand secteur zénithal a été mis en place. Les observations des étoiles et des planètes, continuent toujours à être faites avec la même activité dans ce bel établissement, qui, de même que les observatoires de Cambridge et d'Armagh, publie ses travaux avec une régularité dont la science retire les plus grands avantages.

La rédaction du *Nautical almanac*, confiée aux soins de *M. Stratford*, vient de prendre aussi un extension nouvelle qui augmentera de beaucoup son utilité pour les astronomes et pour les marins en particulier. Depuis quelque temps, la publication de cet intéressant recueil souffrait des retards, mais grâce aux soins des rédacteurs actuels, le volume de 1834, qui vient d'être

mis en vente, sera bientôt suivi de celui pour 1835; et tout fait espérer qu'on pourra à l'avenir se procurer ces éphémérides quelques années avant d'être dans le cas de devoir les employer, ce qui est indispensable, surtout pour les navigations de long cours. La société royale astronomique seconde puissamment par ses encouragemens et par les précieux mémoires qu'elle publie, l'élan que l'astronomie reprend maintenant en Angleterre.

J'ai revu également avec le plus grand intérêt l'observatoire de *M. South*, où j'avais reçu, lors de mon premier voyage, un accueil si amical, accueil qui me fut renouvelé encore par l'habile observateur qui a fondé cet établissement à ses frais. L'observatoire s'est enrichi, depuis 1827, de la grande lunette de *M. Cauchoix*, et *M. South* n'a épargné aucuns soins pour lui donner un local et un support parallactique convenables; malheureusement la construction du support, livrée du reste à des mains très-habiles, a moins bien réussi que d'autres ouvrages des mêmes artistes. Peut-être de nouveaux perfectionnemens y donneront plus de stabilité, mais dans l'état actuel de l'instrument, il serait impossible de conserver une étoile sous le fil ou de prendre une mesure micrométrique; la marche des étoiles étant trop ondulante pour pouvoir obtenir des résultats précis.

Note sur la théorie du mouvement rectiligne et oscillatoire d'un point matériel; par M. Plana, directeur de l'observatoire de Turin.

Pour mieux fixer les idées sur un passage qu'on lit à la page 197, du 1er vol. de la *Mécanique céleste* de *Laplace*, j'ai pensé qu'il pouvait être utile d'entrer dans les détails que je vais exposer.

Soit $\sqrt{\mu^2}$ le pouvoir attractif d'une force centrale à l'unité de distance. Si un point matériel placé à la distance $a(1+e)$ part du repos, il prendra vers ce centre attractif un mouvement rectiligne qui doit être déterminé par l'équation

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pm\sqrt{\mu^2}}{[a(1+e)-x]^2};$$

x désignant l'espace parcouru dans le temps t, depuis le point de départ. On prendra le radical avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que x sera plus petit ou plus grand que $a(1+e)$.

Cela posé, l'équation (1) fournira ces deux intégrales

$$(2) \ldots\ldots \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\sqrt{\mu^2}}{a(1+e)-x} + C;$$

$$(3) \ldots\ldots \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{-\sqrt{\mu^2}}{a(1+e)-x} + C';$$

où C et C' désignent deux constantes arbitraires. Pour déterminer ces constantes, nous supposerons que la vitesse $\frac{dx}{dt}$ est nulle lorsque $x=o$, et qu'elle redevient nulle lorsque $x = 2a(1+e)$. Il est clair qu'on satisfait à cette double condition, en prenant

$$C = C' = -\frac{2\mu}{a(1+e)}.$$

Ainsi nous avons :

$$(2)' \ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{a(1+e)-x} - \frac{2\mu}{a(1+e)}; \ldots \quad x<a(1+e).$$

$$(3)' \ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{x-a(1+e)} - \frac{2\mu}{a(1+e)}; \ldots \quad x>a(1+e).$$

d'où l'on tire

$$(2)'' \ldots dt\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = dx\sqrt{\frac{a(1+e)-x}{x}}; \ldots\ x < a(1+e).$$

$$(3)'' \ldots dt\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = dx\sqrt{\frac{x-a(1+e)}{2a(1+e)-x}}; \ldots x > a(1+e).$$

En faisant $a\,(1+e) - x = x'$ dans la première de ces équations, et $x - a\,(1+e) = x''$ dans la seconde, nous aurons

$$dt\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = -\frac{dx'.\sqrt{x'}}{\sqrt{a(1+e)-x'}};$$

$$dt\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = \frac{dx''\sqrt{x''}}{\sqrt{a(1+e)-x''}};$$

ou bien

$$(2)''' \ldots\ dt'\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = \frac{-x'dx'}{\sqrt{a(1+e)x'-x'^2}};$$

$$(3)''' \ldots\ dt''\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = \frac{x''dx''}{\sqrt{a(1+e)x''-x''^2}};$$

où je distingue par t' et t'' les temps qui précèdent de ceux qui suivent l'instant du premier passage du point matériel par le centre d'attraction.

En intégrant l'équation $(2)'''$ de manière qu'on ait $t' = o$ lorsque $x' = a\,(1+e)$, on obtient

$$(4) \ldots\ t'\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}} = \sqrt{a(1+e)x'-x'^2}$$

$$+\frac{a(1+e)}{2}\left(\pi - \text{arc. cos.} = \frac{a(1+e)-2x'}{a(1+e)}\right);$$

et en intégrant l'équation (3)''' de manière qu'on ait $t''=o$ lorsque $x''=o$, on trouve

$$(5)\ldots\; t''\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}}=-\sqrt{a(1+e)x''-x''^2}$$

$$+\frac{a(1+e)}{2}\text{arc. cos.}=\frac{a(1+e)-2x'}{a(1+e)}.$$

La formule (4) donne

$$(6)\ldots\ldots\; T'=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{a(1+e)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour le temps T' qui répond à $x'=o$: la formule (5) donne pour t'' une valeur égale à T', en y faisant $x'=a(1+e)$. Cela est d'ailleurs évident, puisqu'il s'agit ici d'un mouvement rectiligne et oscillatoire, où la vitesse est la même à droite et à gauche du centre attractif pour des distances égales à l'égard de ce centre.

Si l'on veut exprimer le second membre de l'équation (4) par la distance x mesurée depuis le point de départ, on y fera $x'=a(1+e)-x$; ce qui donnera

$$(7)\ldots\; t'\sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)}}=\sqrt{a(1+e)x-x^2}$$

$$+\frac{a(1+e)}{2}\left(\pi-\text{arc. cos.}=\frac{2x-a(1+e)}{a(1+e)}\right).$$

En posant $e=1$ dans cette formule, on la fera coïncider avec celle donnée pour le même objet à la page 197 du 1er volume de la *Mécanique céleste*.

Considérons maintenant l'expression du temps, relative au mouvement elliptique d'un point soumis à la même force centrale, en partant de l'aphélie d'une ellipse dont $a(1+e)$ désigne

la distance aphélie. On sait que, dans ce cas, on a

$$t = \frac{[a(1+e)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1 - e\cos.v)^2},$$

v étant l'anomalie comptée depuis l'aphélie. En nommant r le rayon vecteur, on a l'équation

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos.v}$$

qui permet d'exprimer le temps par r. De sorte que nous avons

$$t = -\sqrt{\frac{a(1+e)}{\mu}} \int \frac{dr}{\sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{a(1-e^2)}{r}\right)^2}}.$$

En faisant ici, $r = a(1+e) - x$, il viendra

$$(8)\ldots\ldots t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \frac{dx\,[a(1+e)-x.]}{\sqrt{x(2ae-x)}}.$$

Donc, en exécutant cette intégration de manière qu'on ait $t = o$ lorsque $x = o$, on aura

$$(9)\ t = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\sqrt{\frac{2aex - x^2}{a^2}} + \pi - \text{arc.}\cos. = \frac{x-ae}{ae}\right);$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{\mu}},$$

en posant $x = 2ae.$

Cette valeur de T coïncide avec celle de T′, donnée par la formule (6), lorsque $e = 1$. Mais le mouvement *cesse* d'être *elliptique* dès qu'on fait $e = 1$. Ainsi, mathématiquement parlant,

quelque grande que soit l'excentricité, il y a une différence entre les temps t' et t qui répondent à la même valeur de x dans le mouvement *rectiligne* vers le foyer, et dans le mouvement *elliptique* vers le même foyer. En analysant, comme nous venons de le faire, les deux cas que présente ce mouvement, on évite toute obscurité, et on conçoit ce qu'il y a d'inexact dans les opinions émises par *Euler*, au sujet de ce problème, dans le 1er vol. de sa *Mécanique*. (Voyez pages 107, 108, 109, 268, 315, 316) et adoptées par *Montucla*, d'après ce qu'on lit à la page 447 du second volume de son *Histoire des mathématiques*.

Au reste, l'idée de tirer la formule entre l'espace et le temps, qui convient au mouvement rectiligne, de la formule analogue relative au mouvement elliptique n'est pas nouvelle. *Newton* avait déjà considéré le mouvement rectiligne sous ce point de vue dans la 7me section du premier livre de ses *Principes*.

On suppose tacitement dans la solution du problème précédent, que le centre attractif est produit par un mécanisme tel, qu'il ne peut opposer aucun obstacle au mouvement du point matériel, même à l'instant de son passage par ce centre. Cela ne pourrait pas avoir lieu en vertu de l'action d'une masse sphérique et solide : et en la supposant percée par un trou, afin de rendre libre le passage du point matériel, la question changerait de nature, puisque, dans l'intérieur de la sphère, la loi de l'attraction serait différente. Mais, sans s'écarter de la loi réciproque au carré des distances, il y a un autre moyen de produire un mouvement rectiligne et oscillatoire qui paraît plus facile à réaliser.

Imaginons un point matériel placé sur la perpendiculaire élevée par le milieu de la ligne 2K, qui joint deux centres attractifs fixes, d'une égale intensité. Il est clair que le mouvement sera rectiligne, puisque ces deux forces se réduisent à chaque instant, à une seule dirigée suivant la perpendiculaire au milieu de la ligne 2K. Soit f la distance initiale du point matériel depuis ce milieu; et soit $\frac{1}{2}\mu$ l'intensité de chacun de ces centres attractifs à l'unité de distance. Si le point matériel part du re-

pos, on aura pour l'équation de son mouvement

$$(10) \ldots\ldots \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu(f-x)}{[(f-x)^2+K^2]^{\frac{3}{2}}};$$

x étant l'espace parcouru dans le temps t.

En intégrant cette équation de manière qu'on ait $\frac{dx}{dt} = o$, lorsque $x = o$, et posant $z = f - x$, on aura

$$(11) \ldots \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\mu\left(\frac{1}{\sqrt{K^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{K^2+f^2}}\right).$$

Actuellement, si l'on fait $f = K.\ \text{tang.}\ \beta$, $z = K.\ \text{tang.}\ \Psi$, cette équation se changera en celle-ci

$$\left(\frac{d\Psi}{dt.\ \cos.\ ^2\Psi}\right)^2 = \frac{2\mu}{K^3}(\cos.\ \Psi - \cos.\ \beta);$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$2t\sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = -\int \frac{d\Psi}{\cos.^2\ \Psi\sqrt{\sin.^2\frac{1}{2}\beta - \sin.^2\frac{1}{2}\Psi}}.$$

L'intégration par rapport à Ψ doit commencer avec $\Psi = \beta$; mais en faisant

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\Psi = \sin.\ \tfrac{1}{2}\beta.\ \sin.\ \varphi = c.\ \sin.\ \varphi$$

on aura l'équation

$$(12) \ldots t\sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = -\int \frac{d\varphi}{(1-2c^2\ \sin.\ ^2\varphi)^2\sqrt{1-c^2\ \sin.^2\ \varphi}};$$

où l'intégrale est censée prise depuis $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Cela posé, si l'on réduit cette intégrale par la formule donnée à la page

135 du 1[er] vol. des *Exercices* de *Legendre*, on aura

$$(13). \left(\frac{1-2c^2}{2c^2}\right) t \sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = \frac{\Delta.\sin.\varphi\cos.\varphi}{1-2c^2\sin.^2\varphi} + \frac{1}{4c^2}[F-2E-\pi(-2c^2)],$$

en observant que

$$\Delta = \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}; \quad E = \int \Delta d\varphi;$$

$$F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}; \; \pi(-2c^2) = \int \frac{d\varphi}{(1-2c^2\sin.^2\varphi)\Delta}.$$

Comme, par la nature de la question, le paramètre $2c^2 = 2\sin.^2 \frac{1}{2}\beta$ demeure toujours inférieur à l'unité, on peut établir cette équation

$$F - \pi(-2c^2) = \pi(-\tfrac{1}{2})$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{1-2c^2}}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{1-2c^2}{2}}\,\frac{\text{tang.}\varphi}{\Delta}\right)\right].$$

(*Voyez* pag. 69 du 1[er] vol. cité plus haut).

Donc, en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (13), il viendra

$$(14).. \left(\frac{1-2c^2}{2c^2}\right) t \sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = \frac{\Delta\sin.\varphi\cos.\varphi}{1-2c^2\sin.^2\varphi} - \frac{E}{2c^2} + \frac{1}{4c^2}\pi(-\tfrac{1}{2})$$

$$+ \frac{1}{4c^2}\sqrt{\frac{2}{1-2c^2}}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{1-2c^2}{2}}\,\frac{\text{tang.}\varphi}{\Delta}\right)\right].$$

pour avoir le temps T de la demi-oscillation, il faudra faire $\varphi = o$; ce qui donne

$$(15).. \left(\frac{1-2c^2}{2c^2}\right) T \sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = \frac{\pi}{8c^2}\sqrt{\frac{2}{1-2c^2}} + \frac{E'}{2c^2} - \frac{\pi'(-\frac{1}{2})}{4c^2}$$

en observant que nous changeons ici le signe des intégrales E, π, parcequ'elles sont censées évaluées depuis $\varphi = o$.

Pour exprimer l'intégrale complète $\pi'(-\frac{1}{2})$ par les transcendantes elliptiques inférieures, nous poserons l'équation,

$$-\tfrac{1}{2} = -1 + (1 - c^2)\sin.^2\theta = -1 + b^2 \sin.^2\theta,$$

et en évaluant, d'après l'amplitude θ, les deux intégrales

$$F(b_1\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - b^2 \sin.^2\theta}}, \quad E(b_1\theta) = \int_0^\theta d\theta \sqrt{1 - b^2 \sin.^2\theta},$$

on aura, conformément à la formule posée à la page 141 du 1er vol. des Exercices de *Legendre*;

$$\frac{1}{4c_2}\pi'(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{\pi}{2} + F'(c)\left[1 + F(b_1\theta) - E(b_1\theta)\right] - E'(c).F(b_1\theta)]}{c^2\sqrt{2(1 - 2c^2)}}.$$

En substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (15), on aura

$$(16)\ldots \left(\frac{1 - 2c^2}{2c^2}\right)T\sqrt{\frac{\mu}{K^3}} = -\frac{\pi}{4c^2\sqrt{1 - 2c^2}}$$

$$+ \frac{E'(c)}{2c^2}\left[1 + \frac{2F(b_1\theta)}{\sqrt{2(1-2c^2)}}\right] - \frac{F'(c)}{c^2\sqrt{2(1-2c^2)}}\left[1 + F(b_1\theta) - E(b_1\theta)\right].$$

Il est inutile de pousser plus loin l'analyse de cette question : il suffit d'avoir mis en évidence le changement qui s'opère dans les expressions analytiques lorsqu'on passe du premier mouvement rectiligne à celui-ci.

Le cas où le mouvement du point matériel a lieu sur la ligne même qui joint les centres attractifs indéfiniment prolongée a été résolu complétement par *Legendre* (voyez tome 2, de ses Exercices, page 502.)

Turin, le 5 mai 1833.

Remarques de M. HAMILTON, *directeur de l'observatoire de Dublin, sur un mémoire de* M. PLANA, *inséré dans le* tome VII, *de la* Correspondance Math. (extrait d'une lettre).

Les recherches de *M. Plana*, sur les rayons réfractés ne paraissent pas terminées dans la livraison (1) que j'ai vue; mais sa difficulté est clairement établie dans cette livraison pour le cas des rayons réfractés, et si on ne pouvait la vaincre pour ce cas important, elle serait une fatale objection contre le théorème des trajectoires orthogonales. *M. Plana*, lui-même, paraît cependant regarder ce théorème comme vrai, et il soupçonne en conséquence qu'il y a dans son analyse quelque vice radical (2), qu'il n'a pu reconnaître. S'il me fait l'honneur de lire les remarques suivantes, il sera convaincu, je crois, que ce soupçon n'est pas fondé, et que son analyse ne demande qu'à être poussée un peu plus loin, afin de démontrer le théorème avec lequel elle paraît en opposition.

M. Plana désigne par xyz, les coordonnées du point sur une surface réfléchissante

$$z = f(x, y), \quad dz = pdx + qdy,$$

où la surface est rencontrée par un rayon incident issu normalement d'un point $x'y'z'$ d'une certaine autre surface

$$z' = \mathrm{F}(x', y'), \quad dz' = p'dx' + q'dy';$$

de manière qu'en désignant par r la portion interceptée de ce

---

(1) 2e livraison.

(2) « Il y a dans l'analyse précédente un vice radical, qui échappe à toutes mes réfléxions. » Mém. pag. 99.

rayon, il a

$$\text{(II)} \ldots \; r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} x-x' + p'(z-z') = o \\ y-y' + q'(z-z') = o. \end{array}\right\} \ldots \ldots (n)$$

Il considère x', y' et par suite z', r comme jonctions des deux variables indépendantes x, y déterminées par les équations précédentes, et prouve qu'elles donnent par la différentiation

$$\text{(III)} \ldots\ldots \; r\frac{dr}{dx} = x - x' + p(z-z'),$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots \; r\frac{dr}{dy} = y - y' + q(z-z').$$

Il pose, par abréviation,

$$\text{(a)} \ldots\ldots \; a' = \frac{x-x'}{z-z'}, \quad b' = \frac{y-y'}{z-z'},$$

et il suppose, pour simplifier, que le rayon réfléchi par le point xyz coïncide avec l'axe des z; auquel cas, il prouve qu'on a

$$\text{(b)} \ldots \; a'(1+p^2+q^2) + 2p(1-a'p-b'q) = o,$$
$$b'(1+p^2+q^2) + 2q(1-a'p-b'q) = o;$$

et finalement il déduit, comme la condition de l'orthogonalité des surfaces développables formées par les rayons réfléchis, une équation qui peut être exprimée ainsi :

$$\text{(c)} \ldots \; 2q(p+a')\frac{dx'}{dx} + (2b'q - 1 - p^2 + q^2)\frac{dy'}{dx} =$$
$$2p(q+b')\frac{dy'}{dy} + (2a'p - 1 - q^2 + p^2)\frac{dx'}{dy}: \quad (1)$$

---

(1) Ce coefficient différentiel partiel est $\frac{dy'}{dx}$ dans la livraison (page 98 dernière ligne), mais évidemment par une erreur typographique.

mais *M. Plana* ne voit pas de preuve analytique que cette équation soit vraie, excepté dans des cas particuliers.

Pour écarter cette difficulté, j'observe que les équations (*n*) de *M. Plana* combinées avec les équations définitives (a) et avec la formule $dz' = p'dx' + q'dy'$, donnent

$$dz' = -(a'dx' + b'dy');$$

si l'on différentie l'équation (IV) par rapport à x, et l'équation (III) par rapport à y; on trouve en comparant

$$(e) \qquad r\frac{d^2r}{dxdy} + \frac{dr}{dx}\frac{dr}{dy} - (z - z')\frac{d^2z}{dxdy} - pq$$
$$= a'q\frac{dx'}{dx'} + (b'q - 1)\frac{dy'}{dx}$$
$$= b'p\frac{dy'}{dy} + (a'p - 1)\frac{dx'}{dy}:$$

d'où il suit facilement, à cause de (*b*), que l'équation (*c*) est vraie (1), et qu'ainsi les surfaces développables des rayons réfléchis sont en général perpendiculaires les unes aux autres; ou, en d'autres termes, que les rayons réfléchis sont en général normaux à une surface, quand les rayons incidens sont normaux à une autre.

En complétant ainsi l'analyse de *M. Plana* sur ce point important, j'ai cru devoir, par l'estime que je lui porte, adopter sa méthode et sa notation. La marche que je suis pour démontrer le théorème de *Huyghens*, sur l'existence d'une série de surfaces perpendiculaires aux rayons d'un système ordinaire homogène quelconque, est d'après l'expression fon-

---

[1] (*c*) et (*e*) peuvent s'écrire, à cause de (*b*),

$$2pq\frac{dx'}{dx} + (1 - p^2 + q^2)\frac{dy'}{dx} = 2pq\frac{dy'}{dy} + (1 - q^2 + p^2)\frac{dx'}{dy}.$$

damentale que j'ai établie pour la variation de ma *fonction caractéristique* V, (1) la suivante

$$\delta V = \delta \int v ds = \frac{\delta v}{d\alpha}\,\delta x + \frac{\delta v}{\delta \beta}\,\delta y + \frac{\delta v}{d\gamma}\,\delta z\,;$$

équation dans laquelle $x\,y\,z$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque sur un rayon quelconque du système; et $\alpha\,\beta\,\gamma$ sont les cosinus des angles du rayon avec les demi-axes positifs de ces coordonnées; tandis que V est la vitesse corpusculaire le long du rayon, exprimée comme une fonction homogène de la première dimension du cosinus de la direction $\alpha\,\beta\,\gamma$. Dans le fait, pour des systèmes ordinaires, cette formule générale se réduit à la suivante :

$$\delta V = v(\alpha dx + \beta \delta y + \gamma dz),$$

et elle montre que les rayons d'un pareil système sont perpendiculaires à chacune de ces surfaces pour lesquelles ma fonction V est égale à toute quantité constante. Dans la théorie ondulatoire de la lumière, les surfaces perpendiculaires sont des ondes. Quand les rayons d'un système ordinaire sont incidens sur un cristal, les rayons réfractés extraordinaires ne sont pas en général perpendiculaires aux ondes ni à aucune autre surface commune; les rayons extraordinaires ont cependant, des surfaces perpendiculaires dans une certaine classe de cas, déterminés par une équation différentielle partielle du second ordre, que j'ai pu intégrer pour les cristaux à un axe. Quelle que puisse être la disposition des rayons dans le cristal, ils deviennent de nouveau perpendiculaires aux surfaces pour lesquelles ma fonction V est constante, quand ils émergnent dans un milieu ordinaire.

Observatoire de Dublin, le 16 août 1833.

---

(1) Dans un des numéros suivans de la *Correspondance*, nous donnerons un aperçu des travaux analytiques de *M. Hamilton* sur l'optique.

Suite de la *recherche immédiate des orbites des comètes*, par M. B. Valz, astronome à Nîmes, et correspondant de l'Institut de France (1).

Soient:

LL′L″	Les trois longitudes géocentriques d'une comète.
$\lambda\lambda'\lambda''$	Ses latitudes géocentriques.
$rr'r''$	Ses rayons vecteurs.
HH′H″	Ses longitudes héliocentriques.
$\pi\pi'\pi''$	Ses latitudes héliocentriques.
$\nu\nu'\nu''$	Ses anomalies vraies.
$\rho\rho'\rho''$	Ses distances accourcies.
AA′A″	Les longitudes du soleil correspondantes.
RR′R″	Les rayons vecteurs de la terre.
EE′E″	Les élongations.
SS′S″	Les commutations.
CC″	Les parties de l'arc de grand cercle compris entre les observations extrêmes, coupé par le rayon vecteur moyen.
a	Le demi-grand axe de la trajectoire.
e	L'excentricité.
p	Le paramètre.
u	L'anomalie excentrique.
x'	L'argument de latitude.
x	La distance au nœud.
D	La distance périhélie.
TT′T″	Les temps comptés du périhélie.
JJ′J″	Les jours de la table des anomalies.
tt'	Les temps intermédiaires aux observations.
c	La corde de l'arc parcouru.
k	$= 27^{\text{jours}}.40385$.
I	L'inclinaison de l'orbite.

---

(1) La première partie de ce mémoire a été insérée dans le tome précé-

La dernière équation deviendra

$$\frac{\rho \sin. C}{\cos. \lambda (CC')} = \frac{\rho' \sin. C''}{\cos. \lambda'' (C'C'')}.$$

et la projection écliptique

$$\frac{\rho \sin. (L'L)}{(CC')} = \frac{\rho'' \sin. (L''-L')}{(C'C'')}$$

qui donneront par conséquent

$$\frac{\sin. (L'-L)}{\sin. (L''-L')} = \frac{\sin. C \cos. \lambda''}{\sin. C' \cos. \lambda}.$$

Mais le dernier membre pouvant s'obtenir avec plus de précision que le premier qui est sujet à en manquer, lorsque les longitudes varient peu, nous l'y substituerons avec avantage, et l'équation (1) deviendra alors

$$\frac{\rho''}{\rho} = M = \frac{R'' \sin. (A''-A') \sin. C \cos. \lambda''}{R \sin. (A'-A) \sin. C' \cos. \lambda}, \quad (2)$$

C, C' pourront s'obtenir comme ci-après.

Comme on n'obtient ainsi que le simple rapport des distances accourcies extrêmes, et qu'il faudrait parvenir à déterminer

---

dent de la *Correspondance Mathématique*, pag. 159. Le mémoire entier de *M. Valz* a paru presqu'aussitôt après dans la *Connaissance des temps*, pour 1834. Depuis, l'auteur, en nous faisant passer le reste des son manuscrit, a fait subir à son travail plusieurs modifications importantes; et l'une de ses tables, celle qui donne les *distances des comètes à la terre*, est entièrement changée.

l'une d'elles, on ne pourrait que la supposer arbitrairement fort différente sans doute de la vraie (puisqu'on n'en a aucune connaissance même approchée) et la vérifier ensuite par le calcul de l'intervalle de temps, en recommençant consécutivement de nouvelles hypothèses jusqu'à réussite complète. On serait exposé ainsi à de nombreuses et vaines tentatives, qu'il sera fort utile de chercher à diminuer le plus possible. On pourrait du moins reconnaître des limites aux suppositions, par celles de la corde de la trajectoire, qui, par l'expression qu'en a donnée *Duséjour*, pourrait avoir cette forme

$$c^2 = \alpha^2\rho^2 + \beta\rho + \gamma^2,$$

γ étant la corde de l'arc parcouru par la terre. En supposant des observations équidistantes, ce qu'on peut toujours se procurer par interpolation, la corde de la trajectoire de la comète ne saurait excéder

$$\gamma\left(\frac{2}{\mathrm{R}' \sin. \mathrm{E}_{\prime}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seulement $\gamma\sqrt{2}$, si l'élongation dépasse 90°, ni être moindre que γ, si α et β sont de même signe,

ou
$$\sqrt{\gamma^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

s'ils ne le sont pas, mais jamais moindre toutefois que $\gamma\sqrt{1/2}$ qui répond à la plus grande distance reconnue $= 4$; ayant d'ailleurs $\cos. \mathrm{E}' = \cos. \mathrm{E}^{\wedge} \cos. \lambda'$ (3); et on dirigerait les essais d'après ces limites à l'aide de l'expression de la corde donnée par *Duséjour*. On pourrait encore recourir à l'inégalité

$$\frac{(\mathrm{L}' - \mathrm{L}) \cos. \lambda}{(\mathrm{L}'' - \mathrm{L}') \cos. \lambda''} \gtrless \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'' - \lambda'},$$

suffisante pour des mouvemens peu considérables, pour recon-

naître si la route apparente est convexe ou concave vers le soleil, où si

$$r' \gtrless R',$$

par conséquent si

$$\rho' \gtrless 2R' \cos. E'$$

et par suite

$$(*) \qquad \rho = \rho' \frac{\sin. (L' - L) + M \sin. (L'' - L')}{M \sin. (L'' - L)} \qquad (4).$$

Mais, à l'aide d'une simple table, nous obtiendrons cette distance même assez approchée dans le plus grand nombre des cas, pour qu'elle n'ait plus besoin que de légères corrections qu'on obtiendra toujours directement et successivement lors même qu'elles deviendraient plus considérables dans certains cas défavorables, à l'aide de deux seules équations, que nous pourrons même réduire en tables, pour en faciliter encore les applications.

Pour obtenir d'abord cette distance accourcie, soit donc δ la distance (dans la direction du soleil), de l'observation moyenne à l'arc de grand cercle, compris entre les deux observations extrêmes, ce qui serait une sorte de déviation de cet arc dans le cours de l'astre; mais pour abréger nous réserverons cette expression à la valeur de

$$\frac{\sin. \delta}{f}$$

$$(*) \qquad \rho = \rho' \frac{\sin. (L' - L) + M \sin. (L'' - L')}{M \sin. (L'' - L)}$$

$$= \rho' \frac{\sin. C \cos. \lambda'' + M \sin. C' \cos. \lambda}{M \sin. C \cos. \lambda'' \cos. (L'' - L') + M \sin. C' \cos. \lambda \cos (L' - L)}$$

surtout lorsque les longitudes varient peu.

employée dans la construction de la table avec

$$\rho^{\circ} = \frac{f'}{R' \cos. \lambda'} \qquad (5);$$

f étant la flèche de l'arc parcouru par la terre, qu'on obtiendra par

$$f = R' - \frac{R' \cos. \frac{1}{2}(A'' - A)}{\cos. \left(\frac{A'' + A}{2} - A'\right)} \qquad (6).$$

Ensuite

$$\text{tang.} \left(P + \frac{L'' - L}{2}\right) = \text{tang.} \frac{L'' - L}{2} \cdot \frac{\sin. (\lambda'' + \lambda)}{\sin. (\lambda'' - \lambda)} \qquad (7)$$

$$\cot. (E_{,} + \delta) = \cot. (P + L - A') \cot. E_{,} \text{tang. } E$$

$$+ \frac{\sin. P \cot. \lambda \sin. \lambda'.}{\sin. (P + L - A') \sin. E_{,}} \qquad (8)$$

sans être entièrement rigoureuse, la valeur précédente de f sera cependant d'une approximation suffisante. Les flèches des arcs parcourus par la terre et par la comète sont inverses aux carrés de leurs rayons vecteurs, conformément aux lois des forces centrales, on aura donc

$$\frac{\sin. \delta}{f} = \frac{\sin. E_{,}}{\rho} - \frac{R'^2 \sin. (E_{,} + S_{,})}{r'^2 \rho^{\circ}} =$$

$$= \frac{\sin.^2 E_{,}}{\rho^{\circ}} \left(1 - \frac{R'^3}{r'^3}\right) = \frac{\sin. E_{,}}{\rho^{\circ}} - \frac{\sin.^3 (E_{,} + S_{,})}{\rho^{\circ} \sin.^2 E_{,}} \qquad (9),$$

$$\rho^{\circ} = \frac{\sin. S_{,}}{\sin. (E_{,} + S_{,})} \qquad (10)$$

En effectuant les réductions, on parviendrait à une équation du 8e degré, réductible au 7e, qui résoudrait le problème fort

laborieusement et serait loin d'abréger les vaines tentatives. Mais il y aura toutefois possibilité de les éluder, et d'éviter ainsi nombre d'essais infructueux, en réduisant les deux dernières formules en table, qu'on pourra disposer de diverses façons relativement au choix des argumens. Nous nous sommes arrêtés à celle qui nous a paru la plus commode pour l'usage et la manifestation des cas défavorables ; quoiqu'elle ne donne pas directement les distances à la terre ρ°, qui sont portées comme argumens avec les élongations directes $E_,$, tandis qu'au contraire la déviation

$$\frac{\sin. \delta}{f}$$

est donnée par la table; ce qui ne pouvant au reste causer aucune difficulté, a paru plus convenable. On y remarquera aisément à la simple inspection, que parfois la déviation n'éprouvant que de faibles variations, la distance ρ° ne pourra alors s'obtenir avec assez d'exactitude; mais les rectifications que nous obtiendrons ensuite, à l'aide de deux autres tables, permettront de la déterminer aussi bien que dans les cas ordinaires. On pourra déterminer CC′ par $\cos. N = \cos. P \cos. \lambda$ (11)

$$\sin. (N + C) = \frac{\sin. (E_, + \delta) \sin. N \sin. \lambda'}{\sin. E_, \sin. \lambda} \qquad (12)$$

$$\cos. (N + C + C') = \cos. (P + L'' - L) \cos. \lambda'' \qquad (13)$$

Dans les mémoires de l'Académie des sciences pour 1779, pag. 62, *Duséjour* a fait connaître l'expression suivante de la corde, qui depuis lors a été fort utilement employée dans le calcul des orbites

$$c^2 = r^2 + r''^2 - 2RR'' \cos. (A'' - A)$$
$$+ 2R\rho'' \cos. (L'' - A) + 2R''\rho \cos. (L - A'')$$
$$- 2\rho\rho'' \left(\cos. (L'' - L) + \text{tang.} \lambda \,\text{tang.} \lambda'' = \frac{\cos. (C + C')}{\cos. \lambda \cos. \lambda''} \right) (14)$$

$$r^2 = R^2 - 2R\rho \cos. E + \rho^2 \sec.^2 \lambda \qquad (15)$$

$$r''^2 = R''^2 - 2R''\rho'' \cos. E'' + \rho'' \sec.^2\lambda'' \qquad (16)$$

éliminant ρ, ρ', ρ'', r, r'' d'après leurs valeurs ci-dessus (4), (5), (2), (15) et (16) et ne laissant que l'inconnue ρ^o, on obtiendra sous cette forme $c^2 = \alpha\rho^{o2} + \beta\rho^o + \gamma$.

Mais avec des intervalles de temps égaux, leur 2ᵉ puissance s'évanouit dans l'expression de la corde en fonction du temps, et l'on a jusqu'au 3ᵉ ordre

$$c^2 = \alpha^2\rho^{o2} + \beta\rho^o + \gamma^2 = \frac{2\gamma^2}{r'\left(\frac{2}{R'} - 1\right)}$$

faisant $\qquad \frac{\alpha}{\gamma}\rho^o = \rho_,$, et $r'\left(\frac{2}{R'} - 1\right) = r_,$

on a $$\rho_,^2 + \frac{\beta}{\alpha\gamma}\rho_, = \frac{2}{r_,} - 1 \qquad (17)$$

pour servir à la construction de la table donnant

$$\frac{\beta}{\alpha\gamma}$$

d'après les argumens $r_,$ et $\rho_,$ et servant à déterminer

$$\rho_, \text{ par } \frac{\beta}{\alpha\gamma} \text{ et } r_,.$$

Mais on a encore l'équation du triangle entre le soleil, la terre et la comète

$$\frac{r'}{R'} = 1 - 2\rho^o \cos. E_, + \rho^{o2} \qquad (18)$$

qu'on réduira aussi en table pour obtenir

$$\frac{r'}{R'}$$

d'après les argumens E, et ρ^o. On pourra donc déterminer d'abord ρ^o d'après une première table, avec une exactitude assez grande le plus souvent; mais lorsque parfois cependant la déviation ne permettra de l'obtenir que plus ou moins approchée, on n'aura alors qu'à l'introduire ainsi dans la dernière équation (18) pour en tirer une valeur de r' qu'on substituera dans celle (17), afin d'en obtenir une valeur plus approchée de ρ^o qu'on mettra de nouveau dans (18) et ainsi de suite pour de nouveaux r' et ρ^o jusqu'à ce que les différences avec les précédens en soient insensibles, ce qui arrivera assez promptement, après un petit nombre de substitutions successives. On procèdera toujours ainsi d'une manière directe et sans hypothèses arbitraires, qui deviennent fatigantes par leur incertitude, et le sentiment pénible qu'on éprouve toujours à faire fausse route. On pourrait éliminer ρ^o entre les deux équations, pour éviter de résoudre l'équation complète du 2e degré; mais cela n'abrégerait guère, et altèrerait un peu, à ce qu'il paraît, la convergence des résultats. Quoique ces derniers calculs ne soient ni longs, ni pénibles, on pourra encore les éviter, comme on l'a vu, à l'aide des deux dernières tables qu'on trouvera avec l'autre à la suite du mémoire. On remarquera que celle qui donne les distances des comètes à la terre, ayant ses différences constantes, pourra se prolonger et s'étendre indéfiniment sans nouveau calcul autant qu'il deviendra nécessaire.

Ayant ainsi obtenu ρ^o avec une exatitude convenable, on en déduira ρ et ρ'' comme ci-dessus. On pourrait au reste vérifier l'intervalle de temps, d'après le théorème de *Lambert*, et on s'assurerait que cela serait peu nécessaire

$$t + t' = \mathrm{K}\,\frac{(r + r'' + \mathrm{C})^{\frac{3}{2}}}{2} - \mathrm{K}\,\frac{(r + r'' - \mathrm{C})^{\frac{3}{2}}}{2}. \qquad (19)$$

Avant de chercher la totalité des élémens qu'il faudrait encore rectifier, il sera convenable de déterminer l'erreur sur l'observation moyenne, afin de la corriger d'abord. Nous remarque-

rons à son sujet que nous n'avons recommandé de l'interpoler pour la rendre équidistante qu'afin d'obtenir plus de simplicité dans les calculs, avec une plus grande approximation ; mais à cela seulement s'en bornera l'emploi, et ce sera à l'observation même qu'il faudra recourir, pour les rectifications, afin de bannir les moindres craintes sur le résultat de l'interpolation. On pourrait recourir à divers moyens pour trouver l'erreur précédente, mais il ne faudra employer que les plus simples. Pour cela, on aura

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}(v''-v)=\frac{c^2-(r''-r)^2}{4rr''} \qquad (20)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, v = \cot.\ \tfrac{1}{2}\,(v''-v) \pm \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r''^{\frac{1}{2}} \sin.\left(\frac{v''-v}{2}\right)} \qquad (21)$$

$$D=r.\cos.^2 \tfrac{1}{2} v \quad (22) \qquad T=JD^{\frac{3}{2}} \quad (23)$$

$$J'=\frac{T'}{D^{\frac{3}{2}}};\ r'=\frac{D}{\cos.^2 \frac{1}{2} v'};\ \sin.(E_{,}+S_{,})=\frac{R' \sin. E_{,}}{r'} \qquad (24)$$

$$\sin.\pi'=\frac{\sin.\lambda' \sin. S_{,}}{\sin. E_{,}} \qquad (25)$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}(H'-H)=\frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(v'-v)-\sin.^2 \frac{1}{2}(\pi'-\pi)}{\cos.\pi' \cos.\pi} \qquad (26)$$

Ensuite, pour établir la comparaison sur la commutation de l'observation moyenne, ou bien encore sur les différences d'anomalie en renversant la dernière équation, on aurait

$$\cos. S'=\frac{\cos. S_{,}}{\cos.\pi'}.$$

sur le rayon vecteur ce serait

$$r'=\frac{R' \sin. E'}{\cos.\pi' \sin.(H'-L')} \qquad (27)$$

et sur l'élongation

$$\text{tang. } E' = \frac{r' \cos. \pi' \sin. (H' - A')}{R' - r' \cos. \pi' \cos. (H' - A')} \qquad (28)$$

ce qui ne sera guère plus long, et aura l'avantage de donner l'erreur géocentrique qu'il faudra chercher en définitive. On pourrait encore comparer les deux valeurs de la distance accourcie, l'une d'après l'élongation, et l'autre d'après la commutation déduite de la différence des anomalies, mais ce serait moins simple ; d'ailleurs le choix entre les trois moyens proposés, selon les circonstances, sera plus que suffisant. Lorsque l'observation moyenne n'offrira pas d'intervalle assez considérable pour obtenir des élémens avec une exactitude suffisante, on établira la vérification sur une observation assez éloignée pour satisfaire à cette condition.

Avec les anomalies et les rayons vecteurs, on pourrait calculer l'angle S T′ C′ fig. 1, dont la différence avec l'élongation, positive ou négative selon que

$$r' \gtrless R'$$

donnerait mieux qu'auparavant la réduction à la corde. Ensuite pour obtenir M plus exactement on aurait

$$\frac{r \sin. (v' - v)}{(CC')} = \frac{r'' \sin. (v'' - v')}{(CC'')}$$

$$M' = \frac{r'' \sin. (v'' - v') \sin. C \cos. \lambda''}{r \sin. (v' - v) \sin. C' \cos. \lambda}$$

$$(BT'') = (AT)\, M$$

$$\frac{\rho''}{\rho} = M' \pm \frac{(AT)}{\rho} (M' - M)$$

et l'on aurait facilement (AT); mais comme cette rectification pourrait ne pas suffire encore, et qu'on serait alors obligé de la réitérer, on simplifiera les calculs en faisant éprouver seulement une légère variation à M, et d'après la marche des erreurs, on satisferait à l'observation de comparaison, dont il faudra représenter la longitude ou la latitude géocentrique, selon celle dont le mouvement sera le plus rapide.

Enfin pour compléter les élémens on a

$$\text{tang.}\left(\frac{H''-H}{2}+x\right)=\text{tang.}\frac{H''-H}{2}\cdot\frac{\sin.(\pi''+\pi)}{\sin.(\pi''-\pi)} \quad (29)$$

$$\text{tang. I}=\frac{\text{tang. }\pi}{\sin.\ x} \quad (30)$$

$$\text{tang. }x'=\frac{\text{tang. }x}{\cos.\ \text{I}} \quad (31)$$

Comme il est des cas où la valeur de M ne saurait se déterminer comme nous l'avons indiqué, et d'autres où elle ne le serait pas assez bien, il est convenable d'examiner les circonstances où cela a lieu, et les moyens qu'il peut y avoir d'y remédier, autant qu'on le pourra.

1° Lorsque les latitudes seront nulles, ou que l'orbite se trouvera dans le plan même de l'écliptique, ce qui n'a pas encore eu lieu, il est vrai, mais est possible cependant, quoique fort peu probable; alors la valeur de M sera moins bien déterminée, C, C' ne pouvant plus s'obtenir de la manière indiquée, et étant remplacés par les différences de longitudes. La déviation, tout en devenant nulle, ne pourra plus faire connaître la distance à la terre. Mais du moins la plus petite valeur de $r' = R' \cos. E'$ ou R' si l'élongation est de plus de 90°, et la subtituant dans l'équation (17), on en déduira un ρ°, qui introduit dans celle (18), donnera une valeur plus approchée pour r', qui remplacera la précédente dans (17) et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de différences entre elles, ce qu'on obtiendra rapidement. Les deux dernières tables pourront

suppléer ces légers calculs; mais on doit remarquer que M n'étant pas obtenu dans ce cas avec assez d'exactitude; les premiers résultats seront moins satisfaisans, et ce ne sera que par la variation de M, que la marche des erreurs sur l'observation de comparaison permettra de déterminer sa vraie valeur, ce qui prolongera un peu plus les calculs.

2° La même difficulté se présenterait pour l'observation moyenne, la comète serait en même temps en opposition (la conjonction ne permettrait guère les trois observations convenables) et dans son nœud, ou dans le prolongement du rayon vecteur de la terre, ainsi qu'on le voit dans la table des déviations; mais la probabilité en est encore très-faible. En général, lorsque les trois lieux de la comète, et celui du soleil correspondant à l'observation moyenne seront situés dans le même grand cercle, ce qui sera aussi bien rare, la valeur de M ne sera pas assez bien déterminée, les erreurs d'observations exerçant une trop grande influence, et C, ne pouvant s'obtenir comme on l'a prescrit, on aura alors pour y suppléer

$$\cos.(N + C) = \cos.(P + L' - L)\cos.\lambda' \qquad (32).$$

La déviation, quoique nulle, ne pourra encore faire trouver la distance à la terre, ce qui rentrera dans le cas précédent, et l'on suivra la même marche pour le résoudre. C'est *Legendre* qui, au sujet des apparitions de 1805 des comètes à courtes périodes, a le premier donné la solution analytique dans ce cas d'exception, regardé auparavant comme insoluble. Il pouvait cependant être résolu par la méthode indirecte ancienne. Cette solution est très-satisfaisante, mais elle est fort laborieuse, et comme le remarque avec raison *M. de Pontécoulant* (théorie analytique du système du monde, tom. II, pag. 37), *elle conduit à des calculs beaucoup trop longs et trop compliqués pour que la pratique puisse s'en accommoder.* C'est ce dont on peut du reste acquérir la preuve en parcourant les quatre approximations successives, et les nombreux calculs qu'elles nécessitent pag. 26 à 36 du second supplément aux nouvelles méthodes de *Legen-*

dre, sans qu'elles aient cependant fait reconnaître à l'auteur l'ellipticité de la comète de trois ans de période, comme il le fait espérer pag. 2.

3° Enfin, ce qui pourrait se rencontrer plus fréquemment, et serait par conséquent bien plus à redouter, lorsque le soleil se trouverait lors de l'observation moyenne, dans le grand cercle passant par le lieu moyen, et l'un des extrêmes de la comète, les erreurs d'observations pourront encore avoir trop d'influence, la valeur de M étant alors nulle ou infinie. Sans ces erreurs, la comète se serait trouvée en contact avec la terre, ou du moins en aurait été fort près, lors d'une des observations extrêmes, mais alors l'arc compris entre le lieu moyen et l'extrême donnera la déviation, et la table présentera l'avantage de faire connaître la distance à la terre lors de l'observation moyenne. La plus petite distance serait indiquée par la grande rapidité du mouvement, et par une parallaxe considérable qui ferait connaître ce faible éloignement. Du moins ces suppositions sur sa valeur seraient tellement restreintes, que le calcul de l'intervalle de temps ferait bientôt connaître la véritable, et qu'il n'y aurait plus qu'à faire les rectifications convenables d'après la marche des erreurs sur l'autre observation extrême; on pourra alors faire usage des formules usuelles suivantes :

$$\text{tang. } S = \frac{\rho \text{ sin. } E}{R - \rho \text{ cos. } E} \qquad (33)$$

$$\text{tang. } \pi = \frac{\text{sin. } S \text{ tang. } \lambda}{\text{sin. } E} \qquad (34)$$

$$r = \frac{\rho \text{ tang. } \lambda}{\text{sin. } \pi} \qquad (35)$$

$$\text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}(v' - v) = \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}(\pi' - \pi) + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}(H' - H) \text{ cos. } \pi' \text{ cos. } \pi \qquad (36)$$

$$t = K\left(r + r' + (rr')^{\frac{1}{2}} \text{cos.} \frac{v' - v}{2}\right)\left(r + r' - 2(rr')^{\frac{1}{2}} \text{cos.} \frac{v' - v}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (37)$$

On remarquera du reste qu'il suffirait que les observations se rapprochassent assez des circonstances susénoncées, pour que les inconvéniens signalés pussent se reproduire.

Lorsqu'on ne pourra parvenir à représenter des observations exactes d'une manière satisfaisante, ou à réduire convenablement les erreurs sur l'observation de comparaison, il faudra renoncer à la parabole, pour recourir à l'ellipse, ce qui n'arrivera que fort rarement; mais les calculs précédens n'en conserveront pas moins la majeure partie de leur utilité. On pourra essayer des grands axes, de 5, 10, 15... en cherchant à satisfaire à l'intervalle de temps dans l'ellipse d'après l'expression

$$t + t' = \frac{3Ka^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}[\varepsilon - \sin.\varepsilon - (\delta - \sin.\delta)] \qquad (38)$$

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r'' + c}{4a}$$

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}\delta = \frac{r + r'' - c}{4a},$$

selon que $v'' - v$ dépassera ou non 180°, δ fera de même; mais l'ambiguité restera sur ε, ce qui vient de ce que par deux points, on peut décrire deux ellipses différentes, ayant un même foyer et demi-grand axe, mais les intervalles de temps compris n'étant pas les mêmes. Les élémens paraboliques obtenus feront reconnaître l'ellipse véritable.

Après avoir satisfait à l'intervalle de temps, il restera à déterminer l'ellipse dont on n'a encore que le grand axe, deux rayons vecteurs et l'angle compris. Pour cela on aurait

$$e\cos.v = \frac{p}{r} - 1 \qquad e\cos.v'' = \frac{p}{r''} - 1 \qquad e^2 = 1 - \frac{p}{a}$$

et comme on ne connaît pas v, v'' mais seulement leur diffé-

rence, il faudra recourir à des transformations qui puissent éliminer les inconnues. Ajoutant et retranchant les deux premières équations, il vient

$$e(\cos. v + \cos. v'') = \frac{p}{r} + \frac{p}{r''} - 2$$

$$= 2e \cos. \frac{v+v''}{2} \cos. \frac{v''-v}{2}$$

$$e(\cos. v'' - \cos. v) = \frac{p}{r''} - \frac{p}{r}$$

$$= 2e \sin. \frac{v''+v}{2} \sin. \frac{v''-v}{2},$$

transposant, carrant, ajoutant et chassant e^2, il ne restera plus que l'inconnue p, qu'on obtiendra alors aisément; mais pour abréger faisons

$$\frac{\frac{1}{r''}+\frac{1}{r}}{\cos. \frac{1}{2}(v''-v)} = y, \quad \frac{\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}}{\sin. \frac{1}{2}(v''-v)} = s, \quad \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}(v''-v)} = z,$$

et nous aurons

$$4e^2 = 4\left(1 - \frac{p}{a}\right) = p^2 S^2 + (py - 2z)^2$$

ou

$$p^2(S^2 + y^2) + 4p\left(\frac{1}{a} - yz\right) = 4 - 4z^2 = -4 \tang.^2 \frac{v''-v}{2} \quad (39)$$

qu'on résoudra à l'ordinaire après les substitions. p déterminé, on obtiendra facilement e, mais on peut l'avoir directement à l'aide d'une construction assez simple, qui fournit les relations suivantes; on en déduira ensuite p.

$$\text{tang. } \alpha = \frac{r \text{ sin. } (v'' - v)}{r'' - r \text{ cos. } (v'' - v)}$$

$$\text{cos. } \beta = \frac{4a(r'' - r) - 2rr'' \text{ cos. } (v'' - v) + 2r''^2}{\frac{2r}{\text{sin. } \alpha} (2a - r'') \text{ sin. } (v'' - v)}$$

$$(2ea)^2 = r''^2 + (2a - r'')^2 - 2r''(2a - r'') \text{ cos. } (\beta \pm \alpha) = 4a(a - p$$

on aura ensuite les anomalies par les deux équations prin
et le temps compté du périhélie par

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} u = \text{tang. } \tfrac{1}{2} v \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)^{\frac{1}{2}} \quad T = \frac{3ka^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}(u - e \text{ sin}$$

et le reste comme pour la parabole. Les erreurs de deux h
thèses, sur l'observation de comparaison, feront connaît
vrai grand axe.

Il est toujours convenable de donner des exemples d'ap
tion du calcul des formules, afin de rendre plus clair, c
pourrait en avoir encore besoin. Nous choisirons pour cet
l'une des dernières comètes, celle de 1830; et l'on verra q
un intervalle de 27 jours, on obtient, sans tâtonnement,
moins de cent logarithmes, des élémens satisfaisans, diff
assez peu de ceux définitifs, qui représentent fort bien les o
vations que nous avons faites durant trois mois, et que
ensemble pour faire la comparaison :

Pass. au pér., avril. .	9j.876.T.M. de minuit à Nîmes	9j.511	Ob
Distance périhélie . .	0.9216.	0.9196	imm
Long. du périhélie. .	212° 13′ 30″	211.53.	
Long. du nœud asc. .	206.22.0.	206.33.	
Inclinaison.	21.16.0 mouvement direct . .	21.28.	

(Pour abréger j'ai été obligé de supprimer les démon
tions, et je n'ai développé l'expression du paramètre, que p
que je n'ai pu la trouver nulle part, et que *Delambre* e
même trois rayons vecteurs avec les angles compris (*As*
tom. III, pag. 346.)

deux de Nîmes.

. .	17° 2′	9.46675	C sin. E″		0.00076
. . . .		9.98819	tang. π″ 18.° 18′.		9.51939
. . . .		9.96873	C sin. π″.		0.50308
. . . .		0.53325	tang. λ″		9.87369
			ρM . . . . . , ...		9.68578
	3.0915	0.49017			
. .	3.2641	0.51376	r″		0.06255
.	0.1726	9.23704	tang. $\frac{H''-H}{2}$		9.48217
. .	9° 48′	9.98724	sin. (π″ + π) 27°. 11′		9.65976
t.		9.97637	C. sin. (π″ — π) 9. 25.		0.78618
. . . .		9.96361	tang	40° 17′	9.92811
. . . .		9.98181	½ (H″—H).	16. 53	
. . . .		0.15655			
. . . . . .		0.10197	x.	23.°24	
			H	229. 57	
tg.	passage	périhélie.	Nœud ascend.	206. 33	

Pour donner une application de la deuxième méthode, plus rigoureuse que la première, nous prendrons l'exemple calculé par *Delambre;* mais dans l'expression de la corde (*Astr.*, tom. III, pag. 358), il faudra substituer la distance accourcie pour l'observation moyenne d'après la formule

$$\rho' = \rho \frac{\text{M sin. } (L'' - L)}{\text{sin. } (L' - L) + \text{M sin. } (L'' - L')} = 1,1488 \qquad (5)$$

ce qui donnera

$$\rho'^2 - 0,19204.\ \rho' = \frac{0,057787}{r'} - 0,028494 \text{ et}$$

$$r'^2 = 1,1646.\ \rho'^2 - 0,83184.\ \rho' + 1,0124.$$

Substituant, dans la première équation, le *minimum* de

$$r' = R' \text{ sin. } E_1 = 0,9294$$

on en tire

$$\rho' = 0.30315$$

qui, introduit dans la deuxième, donne

$$r' = 0,9313;$$

et de là de nouveau par la première

$$\rho' = 0.30285$$

et par la deuxième

$$r' = 0,9313$$

comme le précédent et le vrai. Pour le montrer, revenons à

$$\rho = \frac{\rho'}{1,1488} = 0,34793$$

sensiblement le même que *Delambre* a obtenu (en corrigeant le troisième chiffre qui doit être 7 au lieu de 8) pag. 364, par cinq hypothèses arbitraires, des proportions et la recherche de 80 logarithmes, tandis qu'une douzaine a suffi : il est vrai que la circonstance s'est trouvée favorable, qu'on pourra être dans le cas de les doubler, et qu'il en faut quatre à cinq pour ρ' ; mais la différence sera toujours majeure, et il est d'ailleurs plus satisfaisant toujours de procéder d'une manière en quelque sorte directe et sans suppositions arbitraires.

(*Voir les tableaux.*)

Observatoire de Nîmes, le 2 mars 1833.

Sur les manuscrits de Bradley et de Harriot.

— Nous avons annoncé à la page 374 du volume précédent, que M. *Rigaud*, directeur de l'observatoire d'Oxford, préparait sur *Harriot* un travail semblable à celui que nous lui devons sur *Bradley*. Ce travail a paru depuis peu, et il se recommande à l'attention des savans par des renseignemens historiques du plus haut intérêt. On remarquera particulièrement ce qui concerne les recherches de *Harriot* sur les comètes, sur les satellites de Jupiter et sur les taches du soleil. M. *Rigaud* s'est attaché, dans sa notice, à relever différentes erreurs que le baron *de Zach* a émises sur *Harriot* et qui se sont répandues à la faveur du nom du célèbre astronome allemand. Son ouvrage, imprimé avec tout le luxe des belles éditions d'Oxford, renferme plusieurs *fac simile* de *Harriot* et de *Bradley*, ainsi qu'un exposé extrêmement curieux des différentes tentatives faites par ce dernier savant pour arriver à sa loi de la réfraction astronomique.

TABLEAU

POUR LES DISTANCES DES COMÈTES A LA TERRE.

0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	−1.94	−1.05	−0.36	+0.20	0.65	1.03	1.35	1.63	1.87
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	−1.27	−0.67	−0.23	+0.12	0.40	0.63	0.82	0.98	1.11	1.23
. . .	. . .	. . .	−1.90	−1.07	−0.51	−0.11	+0.18	0.41	0.60	0.73	0.88	0.98	1.08	1.16
. . .	. . .	. . .	−1.08	−0.45	−0.03	+0.26	0.49	0.66	0.80	0.91	1.01	1.09	1.16	1.22
. . .	. . .	−1.33	−0.50	+0.00	0.33	0.57	0.75	0.89	1.00	1.09	1.17	1.23	1.29	1.33
. . .	. . .	−0.74	−0,05	+0.37	0.64	0.84	0.99	1.11	1.20	1.28	1.34	1.39	1.44	1.48
. . .	−1.46	−0.27	+0.33	0.69	0.92	1.09	1.22	1.32	1.40	1.46	1.52	1.56	1.60	1.64
. . .	−0.90	+0.14	0.66	0.97	1.18	1.33	1.44	1.53	1.60	1.66	1.70	1.74	1.78	1.81
. . .	−0.42	+0.50	0.97	1.24	1.43	1.56	1.66	1.74	1.80	1.85	1.89	1.93	1.96	1.99
. . .	0.00	0.83	1.25	1.50	1.67	1.79	1.87	1.94	2.00					
−1.89	+0.38	1.14	1.52	1.75	1.90									
−1.35	+0.73	1.43	1.77	1.98										
−0.86	+1.06	1.70												
−0.41	+1.37	1.97												
0.00	+1.67													

TABLEAU

DES DÉVIATIONS DANS LE COURS APPARENT DES COMÈTES.

ρ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.5	2.0	3.0	4
E_1 10°	−0 51	−0.81	−1.48	−3.56	−13.09	−32.61	−6.70	−1.24	−0.31	−0.07	+0.01	+0.05	+
20	−0.96	−1.45	−2.43	−4.42	−8.05	−7.82	−3.30	−1.05	−0.31	−0.05	+0.05	0.10	
30	−1.30	−1.83	−2.67	−3.75	−4.25	−3.11	−1.50	−0.57	−0.13	+0.04	0.12	0.15	
40	−1.48	−1.90	−2.36	−2.59	−2.21	−1.37	−0.61	−0.17	+0.06	0.16	0.20	0.20	
50	−1.48	−1.70	−1.78	−1.55	−1.04	−0.50	−0.11	+0.11	0.22	0.27	0.28	0.24	
60	−1.30	−1.30	−1.10	−0.74	−0.32	0.00	0.20	0.30	0.34	0.36	0.35	0.27	
70	−0.96	−0.77	−0.47	−0.13	+0.15	0.32	0.40	0.43	0.44	0.42	0.40	0.30	
80	−0.51	−0.23	−0.08	+0.31	0.46	0.52	0.54	0.52	0.50	0.47	0.44	0.32	
90	0.00	0.29	0.50	0.62	0.63	0.65	0.61	0.57	0.53	0.49	0.46	0.32	
100	0.51	0.73	0.80	0.81	0.77	0.71	0.65	0.59	0.54	0.50	0.46	0.32	
110	0.96	1.02	0.98	0.90	0.81	0.73	0.65	0.59	0.53	0.48	0.44	0.31	
120	1.30	1.19	1.05	0.92	0.80	0.70	0.62	0.55	0.50	0.45	0.41	0.29	
130	1.48	1.24	1.03	0.87	0.74	0.64	0.56	0.49	0.44	0.40	0.37	0.25	
140	1.48	1.16	0.93	0.76	0.64	0.55	0.48	0.42	0.37	0.34	0.31	0.21	
150	1.30	0.97	0.75	0.61	0.51	0.43	0.37	0.33	0.29	0.26	0.26	0.16	
160	0.96	0.70	0.53	0.43	0.35	0.30	0.26	0.23	0.21	0.19	0.17	0.11	
170	0.51	0.36	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.10	−0.09	0.08	0.05	
180	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

TABLE

POUR LES RAYONS VECTEURS DES COMÈTES.

ρ / E_1	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
10°	1.00	0.80	0.61	0.42	0.25	0.17	0.28	0.45	0.64	0.83	1.03
20°	1.00	0.82	0.64	0.48	0.37	0.35	0.43	0.57	0.74	0.93	1.11
30	1.00	0.83	0.68	0.57	0.50	0.52	0.60	0.73	0.89	1.06	1.24
40	1.00	0.86	0.74	0.66	0.64	0.68	0.78	0.90	1.05	1.22	1.39
50	0.00	0.89	0.80	0.77	0.78	0.84	0.95	1.08	1.23	1.39	1.56
60	1.00	0.92	0.87	0.87	0.92	1.00	1.11	1.25	1.40	1.56	1.73
70	1.00	0.95	0.94	0.98	1.05	1.15	1.28	1.42	1.57	1.74	1.91
80	1.00	0.99	1.01	1.07	1.17	1.29	1.42	1.57	1.73	1.90	2.08
90	1.00	1.02	1.08	1.17	1.28	1.41	1.80	1.72	1.89	2.06	2.24
100	1.00	1.05	1.14	1.25	1.39	1.53	1.69	1.86	2.03	2.21	2.39
110	1.00	1.09	1.20	1.33	1.48	1.64	1.81	1.98	2.16	2.34	2.52
120	1.00	1.11	1.25	1.40	1.56	1.73	1.91	2.09	2.27	2.46	2.65
130	1.00	1.14	1.29	1.46	1.63	1.81	2.00	2.18	2.37	2.56	2.75
140	1.00	1.16	1.33	1.51	1.69	1.88	2.07	2.26	2.45	2.65	2.84
150	1.00	1.18	1.36	1.55	1.74	1.93	2.13	2.32	2.52	2.71	2.91
160	1.00	1.19	1.38	1.58	1.77	1.97	2.17	2.36	2.56	2.76	2.96
170	1.00	1.20	1.40	1.59	1.79	1.99	2.19	2.39	2.59	2.79	2.99
180	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00

Note lue par M. Hachette, *membre de l'Institut, à la séance de l'Académie Royale des Sciences de Paris, le* 25 *mars* 1833; *et communiquée par l'auteur.*

L'écrit que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, a pour titre : « *Nouvelles considérations géométriques sur l'épure de la* » *voûte d'arête en tour ronde.* »

Un tracé de la voûte ainsi nommée, se trouve dans un ancien recueil de dessins géométraux relatifs à la coupe des pierres, publié par *Larue* en 1728. Chargé du cours de géométrie descriptive à l'école polytechnique, j'avais modifié ce tracé, et l'épure que je fis graver en 1814 pour cette école, contenait plusieurs applications de mes recherches sur les plans tangens aux surfaces réglées. Les additions que j'ai faites récemment à cette épure, se rapportent aux deux surfaces de la voûte d'arête en tour ronde, l'une annulaire et l'autre conoïde, qui se coupent suivant une courbe à double courbure, et néanmoins se touchent en un point de cette courbe. Je me suis proposé de résoudre les deux questions suivantes: 1° de prolonger indéfiniment la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces sur le plan tangent commun de ces surfaces, qu'on suppose *horizontal*; 2° de mener les tangentes à cette projection au point *double* qui est le point de contact des deux surfaces.

En résolvant la première question, j'ai observé que la courbe à double courbure, intersection des deux surfaces de la voûte d'arête en tour ronde, se projetait sur le plan tangent commun de ces surfaces, suivant une spirale d'*Archimède* ralongée ou raccourcie, et, pour certaines données, suivant la spirale même.

J'ai fait voir comment les paramètres des deux surfaces doivent varier, pour que la projection de la ligne d'intersection de ces surfaces soit invariable. Cette relation entre les paramètres étant trouvée, j'en déduis une construction des tangentes à la

projection de la ligne d'intersection, pour les points où la méthode générale doit se trouver en défant, parce que les plans tangens menés par les points aux deux surfaces de la voûte d'arête, se coupent suivant une perpendiculaire au plan de projection.

Il résulte de ces considérations : 1° Qu'il n'y a aucun point de la spirale d'*Archimède* pour lequel on ne puisse lui mener une tangente, en regardant cette ligne comme l'intersection de deux surfaces, l'une annulaire, l'autre conoïde, dont les paramètres sont liés entr'eux par une relation déterminée.

2° Que la spirale construite par la méthode usitée qui donne l'intersection de deux surfaces quelconques définies, se présente avec les deux branches dont la courbe entière se compose, et dont *M. Lacroix* a fait mention dans son excellent *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral*, édition 1828, page 172, fig. 30.

3° Que la construction des tangentes à la spirale dépend de la rectification d'un arc de cercle, ainsi qu'il est démontré par l'expression connue de la sous-tangente.

La seconde question de géométrie descriptive que j'ai résolue, consiste à mener les tangentes aux branches de la spirale qui se croisent au point double. La solution est fondée sur la substitution de deux cylindres du second degré, aux deux surfaces annulaire et conoïde de la voûte d'arête en tour ronde. Ces quatre surfaces ont un point de contact commun, qui est le point double de la spirale. Les deux cylindres étant touchés par le même plan, lequel contient la spirale, et ayant pour axes perpendiculaires à leurs sections droites, deux lignes droites situées dans un plan parallèle à celui de cette spirale, leur ligne d'intersection est composée de deux branches situées chacune dans un plan, et les plans de ces branches coupent le plan tangent commun des deux cylindres, suivant deux droites tangentes à la courbe d'intersection des surfaces annulaire et conoïde; d'où il suit que les projections horizontales de ces droites sont les tangentes de la spirale au point double.

J'ai terminé cet écrit, par un résumé des propositions que

j'ai ajoutées à la *Géométrie descriptive* de *Monge*, et dont j'ai fait plusieurs applications utiles à la coupe des pierres, aux ombres et à la perspective linéaire; ces propositions ont passé dans les livres élémentaires de géométrie à trois dimensions récemment publiés.

Quant au fait géométrique qui est l'objet principal de cette communication, il consiste en ce qu'une projection orthogonale de la ligne d'intersection des deux surfaces de la voûte d'arête en tour ronde, l'une annulaire et l'autre conoïde, et la ligne connue sous le nom de *spirale d'Archimède*, sont deux lignes identiques.

Proposition de géométrie et solution d'une question proposée à la fin de la 2e livraison du tome VII, *de la* Corresp. Math., par M. Chasles.

Soient deux droites AB, A'B', *situées d'une manière quelconque dans l'espace; à partir des deux points fixes* B, B' *pris arbitrairement sur ces droites, on porte sur la première, dans le sens* BA, *une ligne* B a *d'une longueur variable, et sur la seconde, de part et d'autre du point* B', *deux lignes* B' b, B' b' *égales à la ligne* Ba;

1° *Si on tire les droites* ab, *leurs milieux* I *seront sur une droite* DI, *qui passera par le milieu* D *de* BB';

2° *Les milieux* I' *des droites* ab' *seront pareillement sur une droite* DI', *qui passera aussi par le milieu* D *de* BB';

3° *Les deux droites* DI, DI' *feront entr'elles un angle droit.*

1re *Démonstration.* Les deux premières parties de cette proposition résultent du théorème sur le quadrilatère, plan ou gauche, donné dans le 5e livre de la *Géométrie* de *M. Legendre.*

En effet, qu'on prenne BA = B'A'; qu'on joigne par une droite le milieu E de AA' au milieu D de BB': les côtés opposés du quadrilatère AA'B'B sont divisés par les deux droites *ab,*

DE, de manière qu'on a

$$\frac{Ba}{aA}=\frac{B'b}{bA'}, \quad \text{et} \quad \frac{BD}{DB'}=\frac{AE}{EA'}.$$

Donc, d'après le théorême cité, la droite ab, rencontrera la droite DE en un point I, et l'on aura

$$\frac{aI}{Ib}=\frac{AE}{EA'}.$$

Or $AE=EA'$, donc $aI=Ib$. Ainsi le milieu de chaque droite ab est sur la droite DE.

Par la même raison, le milieu de chaque droite ab' est sur une seconde droite DI'.

Il reste à démontrer que les deux droites DI, DI' sont rectangulaires.

Pour cela, nous remarquerons que la droite II' est parallèle à la base bb' du triangle abb', et égale à la moitié de cette base; II' est égale, par conséquent, à la droite Ba.

La droite aB' rencontre la droite II' en un point C qui est le milieu de chacune de ces deux lignes. Donc la droite CD est parallèle au côté Ba du triangle BB'a, et égale à la moitié de ce côté : mais nous venons de dire que $Ba=II'$; donc CD est égale à la moitié de II'; donc la circonférence de cercle décrite dans le plan DII' sur la droite II', comme diamètre, passera par le point D; ce qui prouve que les deux droites DI, DI' sont à angle droit.

Ainsi le théorème est démontré.

Nous avons supposé les deux droites BA, B'A', situées d'une manière quelconque dans l'espace, mais notre démonstration embrasse le cas particulier où elles se trouveraient dans un même plan : ainsi le théorème énoncé dans la deuxième livraison du tom. VII, de la *Correspondance*, à la suite de la table des matières, se trouve démontré.

On conclut de là cette propriété du triangle :

Étant donné un triangle quelconque ABC *dont la base est* AB ; *si, sur les deux côtés* AC et BC, *on porte deux lignes* Ab, Ba *égales à* BC *et* AC *respectivement, et qu'on prenne les milieux* c, a *des segmens* Cb, Ca, *ces deux points milieux seront en ligne droite avec le milieu de la base* AB.

2e *Démonstration.* Supposons que deux mobiles, de masses égales, partent en même temps des points B, B′, et se meuvent avec des vitesses égales suivant les deux droites BA, B′A′ ; leur centre de gravité parcourra, comme on sait, une droite qui sera parallèle à la résultante de deux vitesses égales à celles des deux mobiles, et dont serait animé un seul point. Ici, cette résultante divisera en deux également l'angle des directions des deux vitesses, lesquelles sont parallèles aux directions des deux droites BA, B′A′ que parcourent les deux mobiles. Or, le centre de gravité des deux mobiles est le milieu de la droite qui joint les deux points que nous regardons comme ces deux mobiles. Donc le milieu de chaque droite *ab* est sur une droite DI parallèle à la droite qui devise en deux également, l'angle des deux droites BA, B′A′.

Par la même raison, le milieu de chaque droite *ab′* est sur une droite DI′ parallèle à la droite qui divise en deux également l'angle des deux droites BA, B′A″ lequel est supplément de l'angle des deux droites BA, B′A′.

Or, quand deux droites divisent en deux également, l'une l'angle de deux droites et l'autre leur supplément, elles sont à angle droit ; donc les deux droites DI, DI′ sont à angle droit.

Ainsi les trois parties du théorème sont démontrées.

Chartres, le 30 janvier 1833.

Note sur une construction graphique nouvelle des tangentes *et des* rayons de courbure *des courbes géométriques ; communiquée à la Société philomatique, séance du* 29 *mai* 1830 ; par M. Chasles, *correspondant.*

Les constructions graphiques qui résolvent ces deux pro-

blèmes d'une manière générale, et la propriété fondamentale des courbes sur laquelle ces constructions reposent, peuvent être exposées en peu de mots.

Voici d'abord quelle est cette propriété des courbes géométriques :

« Si par un point pris dans le plan d'une courbe géométrique, on mène deux transversales parallèles à deux axes fixes, et qu'on fasse les produits des segmens compris entre ce point et la courbe sur les deux transversales, le rapport de ces deux produits sera toujours le même, quel que soit le point pris dans le plan de la courbe. »

Ce théorème, démontré dans la *Géométrie de position* de *Carnot*, est une généralisation d'une propriété des lignes du 3e degré, énoncée par *Newton* dans son *énumération* de ces lignes.

Construction des tangentes. Pour déterminer la tangente en un point m d'une courbe géométrique d'un degré quelconque, on mène par ce point deux transversales mA, mA', sous des directions arbitraires; on fait les produits des segmens compris sur ces droites entre le point m et les autres points où elles rencontrent la courbe; soient p, p' ces deux produits;

Par un point M, pris arbitrairement dans le plan de la courbe, on mène deux tranversales parallèles aux deux droites mA, mA'; et on fait les produits des segmens compris sur ces deux transversales entre le point μ et la courbe; soient π, π' ces deux produits.

On portera sur les deux droites mA, mA', à partir du point m, deux lignes proportionnelles aux rapports

$$\frac{\Pi}{p}, \frac{\Pi'}{p'},$$

respectivement; *la droite qui joindra les extrémités de ces lignes sera parallèle à la tangente au point* m.

Ainsi la direction de la tangente est déterminée.

On pourrait construire directement la normale. Pour cela, on porterait sur les deux transversales issues du point m, des lignes

proportionnelles aux rapports

$$\frac{P}{\Pi}, \frac{P'}{\Pi'};$$

par les extrémités de ces lignes et par le point *m*, on ferait passer un cercle; *son centre serait sur la normale à la courbe au point* m.

Construction des cercles osculateurs. Pour déterminer le cercle osculateur en un point *m* d'une courbe géométrique, on mènera par ce point la tangente à la courbe, et une tranversale quelconque *m*A; on prendra les produits des segmens compris sur ces deux droites entre le point *m* et les autres branches de la courbe; soient T et P ces deux produits.

Par un point μ pris arbitrairement dans le plan de la courbe, on mènera deux parallèles à la tangente et à la transversale; et on fera les produits des segmens compris sur ces deux parallèles entre le point μ et la courbe; soient τ et π ces deux produits.

On portera sur la transversale *m*A une ligne égale à

$$\frac{P}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T};$$

l'extrémité de cette ligne sera sur le cercle osculateur cherché.

Il suit de cette construction que si l'on désigne par θ l'angle que la transversale *m*A fait avec la tangente, le rayon de courbure sera égal à

$$R = \frac{1}{2 \sin. \theta} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T}.$$

Si la courbe est du degré *m*, τ et π contiendront *m* facteurs linéaires, P en contiendra $m-1$, et T en contiendra $m-2$.

Quand la courbe sera tracée, ces facteurs seront des lignes comprises sur les transversales; et quand la courbe sera déterminée par son équation, on connaîtra immédiatement, au moyen de cette équation, les valeurs des quatre produits P, T, π, τ; ce qui résulte, comme on sait, de la théorie générale des équations.

Quand la courbe est tracée, il faut qu'elle le soit complétement, c'est-à-dire que toutes ses branches soient décrites, pour que les transversales la rencontrent en autant de points que l'indique le degré de la courbe. Par exemple, si la courbe est une des courbes du quatrième degré, appelées ovales de *Descartes*, il faut connaître sa *compagne*, qui est une seconde ovale, jouissant des mêmes propriétés que la première, qui n'est point indiquée par la construction géométrique que *Descartes* et d'autres géomètres ont donnée de ces courbes, mais qui est renfermée dans la même équation.

Quand on ne connaîtra point l'équation d'une courbe, ni sa description complète, on aura recours à une méthode graphique fondée sur la théorie des surfaces réglées, que *M. Hachette* a exposée dans ses *Élémens de géométrie à trois dimensions*, et dont un extrait se trouve dans le *bulletin* de la société philomatique, année 1816. Cette méthode graphique s'applique aussi, comme on sait, à la construction des plans osculateurs des lignes à double courbure, et même à la détermination de leurs centres de *courbure sphérique*.

Les constructions que je viens d'exposer, s'appliquent aux tangentes et aux rayons de courbure des sections planes des surfaces géométriques; elles conduisent à quelques propriétés nouvelles de ces surfaces, relatives particulièrement aux courbes que *M. Ch. Dupin* à appelées *indicatrices*, dans sa *Théorie de la courbure des surfaces*, (voyez l'ouvrage publié par ce savant, sous le titre : *Développemens de géométrie*, in-4°.)

Faisons observer, en terminant cette note, que nos constructions, ci-dessus énoncées, peuvent être simplifiées parce qu'au lieu de quatre transversales parallèles deux à deux, on peut n'en mener que trois, dont deux issues du point de la courbe et la troisième tout-à-fait arbitraire; cette modification des solutions ci-dessus repose sur une propriété générale des courbes géométriques due à *Carnot*, et dont celle que nous avons citée n'est qu'un corollaire.

Chartres, le 30 janvier 1833.

Nouvelle transformation de la formule fondamentale de la dynamique; par M. PAGANI.

Liége, le 2 avril 1833.

Les principales transformations connues de la formule fondamentale de la dynamique, déduite du principe des vitesses virtuelles, supposent que les divers points matériels d'un système sont rapportés à trois axes fixes rectangulaires ou aux coordonnées polaires. En général, la position relative d'un point dans l'espace est déterminée au moyen de trois axes rectangulaires; seulement, l'origine et les directions des axes sont fixes; c'est le cas des coordonnées orthogonales ordinaires; quelquefois l'origine est située dans le point, et l'un des axes est le *rayon vecteur* mené de ce point à un autre point fixe; c'est le cas des coordonnées polaires; enfin, on peut supposer l'origine au point matériel, et prendre pour axes, le prolongement du rayon osculateur de la trajectoire du mobile, la tangente à cette courbe et une troisième droite perpendiculaire aux deux autres.

La transformation dont je veux parler dépend des axes mobiles de la seconde espèce; elle m'a paru assez simple et féconde en conséquences remarquables pour m'engager à la faire paraître dans la *Correspondance*. Voici la formule :

$$Sm\left(\frac{d^2s}{dt^2}\,\delta s-\frac{v^2}{\rho}\,\delta\rho-\Sigma P\delta p\right)=o.$$

m, dénote la masse d'une molécule quelconque du système;
s, la longueur variable de la trajectoire décrite par m;
v, la vitesse de m au bout du temps t;
ρ, le rayon osculateur;
P, la force accélératrice qui sollicite m après le temps t;
p, la droite menée du point m au centre de la force P.

La caractéristique Σ indique la somme de toutes les forces qui sollicitent la molécule m; la lettre δ désigne la variation

arbitraire des variables, compatible avec les conditions du système; enfin la lettre S est le signe sommatoire qui s'applique à toutes les masses du système.

On voit, à l'inspection seule de la formule, qu'elle est plus simple que toutes celles qui ont été données par *Lagrange* et par d'autres géomètres. On pourrait même la réduire davantage en comprenant parmi les forces accélératrices données le terme

$$\frac{v^2}{\rho}$$

qui exprime la force centrifuge, et qui provient de l'inertie de la matière. Mais la forme précédente est très-propre à mettre en évidence soit la force centrifuge, soit plusieurs autres propriétés que j'ai développées ailleurs.

Sur l'intensité relative du magnétisme terrestre à Paris, Bruxelles, Gœttingue, Berlin et Stockholm; année 1832, par J. Rudberg. (Annales de physique de Berlin.)

Les expériences ont été faites avec une boussole d'intensité de *Gambey*, et avec deux aiguilles appartenant à cet instrument, qui seront désignées dans la suite par n° 1 et n° 2. Comme les observations se faisaient à différentes températures, j'ai déterminé à Stockholm, par des recherches spéciales, son influence sur la force des aiguilles. Et par la moyenne de plusieurs observations, j'ai trouvé, pour n° 1, la correction de

$$i' = i\,(1 - 0{,}0004660.\ t)$$

et pour n° 2
$$i' = i\,(1 - 0{,}0005006.\ t)$$

i' désigne l'intensité magnétique pour t degré du thermomètre centigrade, et i celle pour 0°, ces coefficiens seront conservés dans la suite.

Je laissais osciller l'aiguille suspendue par un fil de cocon, dans une boîte de plomb, à trois pouces du fond; cette boîte était placée dans une autre de bois plus grande et l'intervalle compris entre les deux était rempli, la première fois, avec de la glace pilée; la seconde, avec de l'eau chaude à la température de 30° c. Pour voir les oscillations de l'aiguille, deux lunettes étaient attachées aux deux côtés de la boîte de plomb, et dans une même direction, elles traversaient aussi la boîte de bois. L'une de ces lunettes portait le microscope nécessaire à l'observation; le couvercle de la boite de plomb était en verre, et portait un tube dans lequel était le fil de cocon; il y avait un second trou pour placer le thermomètre qui donne la température de l'aiguille. En outre, la boîte de bois reposait sur une croix munie de vis afin que l'on pût faire mouvoir la boîte autour de son centre au moyen d'une autre petite vis, et mettre ainsi le point de croisement des fils du microscope exactement dans le méridien magnétique.

(Après ces explications, l'auteur donne ses observations originales, et il en déduit les valeurs suivantes pour l'intensité horizontale.)

Pour Paris (1).	*Bruxelles* (2).	*Goettingue* (3).	*Berlin* (4).	*Stockholm* (5).
—	—	—	—	—
N° 2 . . 1,0000	0,97042	0,97695	0,97416	0,85697
N° 2 (*a*). 1,0000	0,97208	0,97964	0,97368	0,85858 (*a* et *c*)
— (*b*). 1,0000	0,97078	0,97833	0,97238	0,85607 (*a* et *d*)
				0,85586 (*b* et *a*)
				0,85493 (*b* et *d*)

Les deux dernières observations pour Stockholm ont été négligées aussi bien pour n° 1, que pour n° 2, parce qu'elles ont été faites dans la boîte de plomb et qu'elles ont donné des résultats sensiblement trop grands.

(1) Dans le cabinet magnétique du jardin de l'observatoire.
(2) Dans le jardin de l'observatoire.
(3) Dans le jardin de l'observatoire.
(4) Dans le jardin de *M. Mendelson*.
(5) Dans une tente, au nord de l'observatoire.

La valeur de l'intensité horizontale est donc

	Pour Paris.	Bruxelles.	Goettingue.	Berlin.	Stockholm.
	—	—	—	—	—
De	1,0000	0,97109	0,97831	0,97341	0,85648

J'ai déterminé en même temps l'inclinaison pour Paris, Berlin, Stockholm, avec une boussole de *Gambey*. A Bruxelles, elle était en mars 1832, d'après les observations de M. *Quetelet*, de 68° 49'; à Gœttingue, elle n'a plus été déterminée depuis 1826, époque à laquelle *M. Alex. Humboldt* l'a trouvée de 68° 29' 26"; en supposant que la diminution annuelle soit restée pour ces dernières années de 2', 8; comme elle a été trouvée par cette observation et les précédentes, elle serait pour le commencement 1832 de 68° 13'. Quoique cette valeur soit probablement trop petite, on peut cependant s'en servir.

La table suivante donne l'intensité totale calculée d'après l'inclinaison.

	Paris.	Bruxelles.	Goettingue.	Berlin.	Stockholm.
	—	—	—	—	—
Inclinaison. . . .	67° 41'	68° 49'	68° 13'	68° 16'	71° 40'
Intensité totale .	1,0000	1,0205	1,0010	0,9982	1,0340

Quoique en général ces observations prouvent que la force magnétique augmente en même temps que la latitude, l'intensité à Berlin fait cependant une exception. Pour Gœttingue l'intensité est aussi proportionnellement trop petite; la cause de ceci peut se trouver dans la détermination hypothétique de l'inclinaison. Ceci n'est cependant pas le cas pour Berlin, où j'ai trouvé, pendant mon séjour, avec une boussole de *Gambey*, appartenant à *M. Reiss*, à différens jours, les valeurs 68° 18', 68° 16' et 68° 14',2; et *M. Reiss* lui-même a trouvé, le 3 juin, 68° 16',2. La moyenne de ces valeurs, abstraction faite des variations journalières, semble donc être pour cette époque sensiblement exacte. Donc, puisque ce n'est pas la situation du terrain qui a produit pour Berlin une telle anomalie, l'on en doit chercher la cause dans la défectuosité des observations. Cepen-

dant, je puis difficilement croire que la défectuosité seule des observations directes ait produit de pareils écarts.

Il serait du reste à désirer que l'on possédât une méthode plus exacte et dont l'exécution fût praticable pour déterminer l'intensité absolue à chaque endroit.

Note. Vers le milieu de l'année 1829 et en 1830, j'ai fait en Allemagne et à Paris des observations magnétiques aux mêmes lieux que *M. Rudberg*, et je suis parvenu aux résultats suivans, en prenant pour unité l'intensité observée à Paris.

	Paris.	*Bruxelles.*	*Goettingue.*	*Berlin.*
Intensité horizontale. .	1,0000	0,9697	0,9759	0,9750
Intensité totale	1,0000	1,0218	1,0150	1,0164

les valeurs que j'ai obtenues pour l'intensité horizontale s'accordent avec celles de *M. Rudberg* beaucoup mieux que les valeurs pour l'intensité totale, ce qui provient sans doute de ce que les inclinaisons magnétiques employées dans nos calculs offraient des différences assez sensibles; je pense du reste que ce dernier élément est celui qui laisse en général le plus à désirer dans les appréciations du magnétisme terrestre. A Q.

Démonstration de l'égalité des momens dans l'équilibre du levier, par M. Le François, professeur à l'Athénée de Gand, et docteur en sciences.

Il y a quelques jours qu'ayant à m'occuper de la théorie du levier, j'en pris occasion pour passer en revue les différentes démonstrations qui ont été données de l'égalité des momens dans l'équilibre de cette machine. Aucune ne me paraît plus élémentaire que celle d'*Archimède*, qui me mit sur la voie de celle que j'ai l'honneur de vous soumettre.

Concevez deux leviers, BAC et DCF, dont l'un ait son point d'appui en A et l'autre son point d'appui en C, à l'une des extrémités du premier. Les petits bras AC et CD sont égaux, et le

bras CF est plus petit que le bras AB de la longueur de l'un des petits bras. On charge l'extrémité B d'un poids m et l'on suspend en C un second poids m' qui fasse équilibre au premier; ou bien on partage m' en deux portions qui se fassent équilibre aux extrémités D et F; de cette manière l'extrémité C est encore chargée du poids m'.

On fait tourner le levier DCF sur C jusqu'à ce que D soit en A, auquel cas tout le poids dont il est chargé est supporté par ce point d'appui. L'extrémité F passe alors en G sur le prolongement de AC à une distance AG du point d'appui égale à AB; mais le poids que porte G fait à lui seul équilibre au poids m suspendu en B, la charge de G est donc égale à m aussi, et par suite celle de D égale à $m'-m$.

Soit actuellement x le poids qui fait, à l'unité de distance du point d'appui, équilibre à m, x sera une fonction de m et du bras AB $=l$, en sorte qu'on pourra poser $x=\mathrm{F}(m, l)$ ou $\frac{x}{m}=\frac{\mathrm{F}(m, l)}{m}$. Le premier membre de cette dernière équation étant indépendant de l'unité de poids, il doit en être de même du second, qui est par suite indépendant de m et égal à fl, d'où $x=mfl$. On aurait de même $x=m'fl'$, l' représentant le bras AC; donc

$$mfl = m'fl' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

pour le premier levier, et

$$(m'-m)\,fl' = mf(l-l')$$

pour le second.

De ces deux relations se déduit cette troisième :

$$fl - fl' = f(l-l') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dont le second membre ne change pas quand on augmente chaque bras de levier d'une même longueur λ; il en doit donc être de même du premier, ainsi

$$fl - fl' = f(l+\lambda) - f(l'+\lambda)$$

ou, en développant,

$$fl-fl'=(fl-fl')+\lambda\left(\frac{dfl}{dl}-\frac{dfl'}{dl'}\right)+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(\frac{d^2fl}{dl^2}-\frac{d^2fl'}{dl'^2}\right)+\text{etc.}$$

d'où
$$\frac{d.fl}{dl}-\frac{d.fl'}{dl'}=o;\ \frac{d.^2fl}{dl^2}-\frac{d^2fl'}{dl'^2}=o\text{, etc.}$$

et

$$\frac{d.fl}{dl}=\frac{d.fl'}{dl'}$$

la fonction $\frac{d.fl}{dl}$ est donc indépendante de l; ainsi :

$$\frac{d.fl}{dl}=\frac{d.fl'}{dl'}=a.$$

L'intégration donne $fl=al+b$, $fl'=al'+c$; et il reste à déterminer les trois constantes a, b, c.

La substitution des valeurs de fl, fl', $f(l-l')$ dans la relation (2) fournit

$$a(l-l')+b-c=a(l-l')+b$$

donc
$$c=o,\ \text{et}\ fl'=al'.$$

Une substitution semblable, faite dans la relation (1) sous l'hypothèse $l=l'$, ce qui donne $m'=m$, conduit à $aml+mab=aml$; ce qui ne peut être à moins que $b=o$, et dès lors $ml=ml'$, etc.

Telle est l'une des deux démonstrations analytiques auxquelles m'a conduit la supposition de deux leviers ayant les rapports indiqués plus haut. Cette même supposition fournit aussi une démonstration très-élémentaire du principe dans le cas où le bras AB est un multiple de la longueur du bras AC.

Sur une méthode générale pour exprimer les trajectôires de la lumière et des planètes, au moyen de coefficiens d'une fonction caractéristique, par W. R. Hamilton, astronome royal d'Irlande.

Nous avons promis, dans la livraison précédente de la *Correspondance mathématique*, de présenter un aperçu des recherches analytiques de *M. Hamilton* sur la lumière : ce savant a eu l'obligeance de nous faire parvenir depuis, un mémoire destiné à paraître dans la revue de l'université de Dublin, par lequel il nous facilite beaucoup le travail que nous nous proposions de faire.

M. Hamilton commence par jeter un coup d'œil général sur l'histoire de l'optique ; il trace rapidement la marche que cette science a suivie; il observe ensuite que, comme toutes les autres sciences physiques, elle a suivi dans ses progrès deux directions différentes, qui ont été nommées l'échelle ascendante et l'échelle descendante, la méthode d'induction et celle de déduction, le chemin de l'analyse et celui de la synthèse. Dans toute science physique, nous devons remonter des faits à leurs lois par la voie d'induction et l'analyse ; et nous devons descendre des lois à leurs conséquences par la voie de déduction et la synthèse.

Dans l'optique, qui, depuis plus de deux mille ans, a toujours attiré l'attention des mathématiciens, plusieurs découvertes importantes ont été faites par cette double voie ; il est néanmoins remarquable que, bien que les lois de cette science soient aussi réductibles à une forme purement mathématique que les autres résultats physiques, leurs conséquences mathématiques ont été moins bien tracées que celles de la plupart des autres lois ; et que, pendant que les expériences modernes ajoutaient tant aux progrès *d'induction* de l'optique, ceux de *déduction* ont si peu gagné par le pouvoir immense que l'algèbre a acquis.

Euclide et *Ptolémée* savaient que la communication entre les objets visibles et l'œil se fait en ligne droite ; et que, quand la ligne de communication est rompue par la réflexion en un point d'un miroir plan ou sphérique, l'angle en ce point entre les deux portions de la ligne rompue, est bisecté par la normale au miroir. On savait aussi que cette loi s'étendait à plusieurs réflexions successives ; sous ce rapport, l'optique d'induction était suffisamment avancée, pour permettre à un mathématicien de résoudre le problème suivant, en tant que cela dépend de la connaissance des lois physiques : déterminer l'arrangement final des rayons droits, ou lignes de vision, par lesquels un œil mobile verrait un point lumineux donné, réfléchi par la combinaison de deux miroirs sphériques. Cependant il restait à faire deux déductions capitales concernant l'arrangement des rayons, sans lesquelles la théorie devait être considérée comme loin d'avoir atteint la perfection : savoir que les rayons définitifs sont en général *tangens à une couple* et qu'ils sont *perpendiculaires à une série* des surfaces; l'une est un théorème nouveau et peu connu, et l'autre est encore en contestation. *Malus* qui découvrit le premier que les rayons d'un système ordinaire réfléchi ou réfracté, sont en général tangens à une couple de surfaces caustiques, fut conduit par la complication de ses calculs à nier l'existence générale (découverte par *Huyghens*) des surfaces perpendiculaires à de pareils rayons ; et l'objection de *Malus* a été renouvelée récemment par un géomètre distingué d'Italie, dans un mémoire remarquable sur les caustiques qui a été publié dans la *Correspondance de l'observatoire de Bruxelles* (1).

Sans multiplier les exemples de l'imperfection de l'optique mathématique ou déductive, il est préférable de remonter à la source de l'imperfection, le manque d'une méthode générale,

(1) Page 13, tome VII. Voyez aussi le mémoire que M. *Hamilton* a inséré sur le même sujet à la page 27 de ce volume.



d'une idée fondamentale qui guide et aide la déduction. C'est cette méthode que M. *Hamilton* a cherché à établir ; il a essayé de faire pour l'optique ce que *Lagrange* a fait pour la mécanique analytique : il lui paraît que le principe fondamental doit être recherché dans le principe connu sous le nom de *loi de moindre action ;* il devrait être établi sur l'induction la plus large, et embrasser toute combinaison connue de milieux, les lignes droites ou brisées ou courbes, ordinaires ou extraordinaires, selon lesquelles la lumière (quelle que soit sa nature) étend successivement son influence en espace et en temps : par exemple, que la trajection linéaire de la lumière qui unit deux points, soit toujours telle qu'en la comparant à une autre variété infinie de lignes par lesquelles l'imagination et la géométrie peuvent lier les deux mêmes points, on ait toujours une certaine intégrale ou somme, souvent appelée *action,* et qui dépend d'après des principes fixes, de la longueur, de la forme, de la position, de la trajectoire et de la nature des milieux traversés, laquelle ait pour propriété d'être moindre que les intégrales semblables pour les lignes voisines ou du moins qui possède à leur égard, une certaine propriété *déterminée*. Cette loi qui servirait de base aux recherches analytiques sur la lumière, pourrait se nommer *la loi de l'action déterminée.*

M. *Hamilton* a déduit de cette loi une autre qu'on pourrait nommer par analogie la *loi de l'action variable* et qui paraît offrir naturellement une méthode de recherches telle qu'on peut la désirer ; l'une de ces lois est en quelque sorte le dernier pas dans l'échelle ascendante d'induction pour la trajectoire linéaire de la lumière, tandis que l'autre peut être employée avec avantage comme le premier pas dans la voie descendante ou de déduction; ce qui va suivre offrira des éclaircissemens et des corollaires de ces deux lois corrélatives.

Nous commencerons par considérer d'abord le cas le plus simple, celui d'une trajectoire lumineuse rectiligne ; car la ligne droite qui est évidemment de toutes les lignes la plus courte, se distingue encore parmi elles par une certaine *propriété déterminée*, et la *loi de variation* qui est renfermée dans les lois

générales de l'action déterminée et variable, pourra servir de premier exemple.

La longueur V d'une ligne donnée droite ou courbe, peut évidemment être indiquée par l'intégrale suivante,

$$V = \int dV = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si nous passons maintenant de cette ligne à une autre voisine, ayant les mêmes extrémités, et si nous supposons que les différens points de la dernière sont liés à ceux de la première par des équations entre leurs coordonnées, de la forme

$$x_\varepsilon = x + \varepsilon\xi, \; y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta, \; z_\varepsilon = z + \varepsilon\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ε étant une constante de peu de valeur, et ξ, η, ζ étant des fonctions arbitraires de x, y, z qui s'évanouissent pour les limites extrêmes de ces variables, c'est-à-dire pour les points extrêmes de la ligne donnée, et qui ne deviennent infinies pour aucun point intermédiaire ni pour la valeur $\varepsilon = o$, quoiqu'elles puissent renfermer en général la constante ε; la longueur V_ε de la nouvelle ligne pourra être représentée par la nouvelle intégrale

$$V_\varepsilon = \int \sqrt{dx_\varepsilon^2 + dy_\varepsilon^2 + dz_\varepsilon^2}$$
$$= \int \sqrt{(dx + \varepsilon d\xi)^2 + (y + \varepsilon d\eta)^2 + (z + \varepsilon d\zeta)^2} \quad . \quad . \quad (3)$$

prise entre les mêmes valeurs extrêmes de x, y, z, que la première. Cette longueur V_ε peut être considérée comme une fonction de ε, qui tend vers l'ancienne valeur V, quand ε tend à se rapprocher de o, le quotient

$$\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V)$$

tendant en général en même temps vers une limite finie qui peut être exprimée ainsi

$$\text{lim.} \frac{1}{\varepsilon} (V_\varepsilon - V) = \int \frac{dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$= - \int \left(\xi d \frac{dx}{dV} + \eta d \frac{dy}{dV} + \zeta d \frac{dz}{dV} \right); \quad . \quad . \quad (4)$$

la dernière de ces formes étant déduite des premières par une intégration par parties et en employant la condition déjà mentionnée que les fonctions ξ, η, ζ s'évanouissent aux limites de l'intégrale. Quand la ligne primitive est telle que la limite (4) s'évanouit indépendamment des formes des fonctions ξ, η, ζ et qu'ainsi la différence de longueur $V_\varepsilon - V$ tend définitivement vers un rapport évanouissant avec la petite quantité ε (qui détermine la différence entre la seconde et la première ligne et forme aussi un rapport fini avec la plus grande distance entre ces deux lignes), on peut dire que la ligne primitive a une *longueur déterminée* V, en tant qu'elle est comparée à toutes les lignes comprises entre les mêmes extrémités, qui en diffèrent très-peu en forme et en position ; et puisqu'il suit facilement de la dernière forme de la limite (4), que cette limite ne peut s'évanouir indépendamment des formes de ξ, η, ζ, sans que

$$d \frac{dx}{dV} = o, \; d \frac{dy}{dV} = o, \; d \frac{dz}{dV} = o, \quad . \quad .. \quad (5)$$

c'est-à-dire, sans que les rapports

$$\frac{dx}{dV}, \frac{dy}{dV}, \frac{dz}{dV},$$

soient constans dans l'étendue de la ligne primitive, mais que les limites s'évanouissent quant cette condition est satisfaite, nous voyons que la propriété de la *longueur déterminée* ap-

partient (dans l'espace) à des lignes droites et à des lignes droites seulement. L'essai précédent de cette propriété de la ligne droite pourra peut être avoir son utilité pour ceux qui ne sont pas très-familiarisés avec le calcul des variations.

Pour éclaircir, par des exemples, cette propriété déterminée de la longueur de la ligne droite, considérons une ligne telle que la corde commune d'une série d'arcs circulaires et comparons sa longueur à celle de ces arcs, et les longueurs de ceux-ci entre elles. La longueur de la ligne droite étant V, soit $1/2\, \varepsilon$ V la hauteur ou la flèche de l'arc circulaire construit sur cette corde, de manière que $1/2\, (\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ V sera le diamètre du cercle et ε la tangente trigonométrique du quart d'un arc ayant le même nombre de degrés, pour un rayon égal à l'unité; nous aurons alors l'expression suivante pour la longueur $V\varepsilon$ de l'arc circulaire, construit sur la corde donnée V,

$$V\varepsilon = V(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \text{ tang.}^{-1}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Cette expression peut prendre la forme

$$\frac{V\varepsilon}{V} = 1 + 4\left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon\right)^2 \varepsilon^{-3} \int_0^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}, \quad . \quad (7)$$

ce qui ne montre pas seulement que le rapport de l'arc circulaire à sa corde est toujours moindre que l'unité, mais encore que puisque

$$\frac{dV\varepsilon}{d\varepsilon} = 4V \int_0^\varepsilon \left(\varepsilon^{-3} \int_0^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}\right) d\varepsilon, \quad . \quad . \quad (8)$$

l'arc V ε croît continuellement avec la hauteur dans un rapport croîssant; son coefficient différentiel étant positif et croissant, lorsque ε est positif et croît; mais s'évanouissant avec ε et montrant ainsi que, dans cette série d'arcs circulaires et d'une corde, la propriété de longueur déterminée appartient seulement à la ligne droite.

Imaginons maintenant que l'on ait tracé une série de demi-

ellipses sur un même axe donné V, en prenant pour l'autre axe conjugué une quantité variable ε V. La longueur d'une quelconque de ces demi-ellipses aura pour expression

$$V\varepsilon = V\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos.\varphi^2 + \varepsilon^2 \sin.\varphi^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi \;. \quad . \quad . \quad (9)$$

ou bien

$$\frac{V_\varepsilon}{V} = 1 + \left(\int_0^{\varepsilon} d\varepsilon\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin.\varphi^2 \cos.\varphi^2\, d\varphi}{(\cos.\varphi^2 + \varepsilon^2 \sin.\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} \;; \quad (10)$$

Ainsi non-seulement le rapport de l'arc elliptique V_ε à sa base ou à son axe donné V, est plus grand que l'unité, et croît continuellement avec la hauteur; mais il croît dans un rapport croissant qui s'évanouit lorsque la hauteur devient nulle : de sorte que, dans cette série d'arcs demi-elliptiques et d'un axe, la dernière quantité seule a la propriété d'avoir une longueur *déterminée*.

En d'autres termes, si l'on construit sur une base d'une longueur donnée, de cent pieds par exemple, une série d'arcs circulaires ou demi-elliptiques ayant cette base pour corde ou pour axe, non-seulement la longueur de ces arcs croîtra avec leur hauteur, mais de plus chaque pied ou chaque pouce ajouté à la hauteur, produira une augmentation de longueur plus grande que celle qui résultait de l'addition précédente d'un pied ou d'un pouce; et plus ces arcs se rapprocheront de la base, plus petite sera la différence de leurs longueurs comparée à celle de leurs hauteurs, jusqu'à ce que la première devienne moindre que la plus petite fraction que l'on puisse imaginer de l'autre. Par exemple, si, sur une base de cent pieds, l'on construit deux arcs circulaires ayant l'un une hauteur de cinquante pieds et l'autre une hauteur de cinquante et un pieds, et étant ainsi le premier égal à une demi-circonférence de cercle et le second plus grand qu'une demi-circonférence, la différence des longueurs de ces deux arcs surpassera un peu la double différence des hauteurs, c'est-à-dire, d'environ deux pieds; mais si sur la même base, l'on décrit un arc circulaire d'un seul pied de hauteur et un

autre de deux pieds de hauteur, la différence des longueurs de ces deux petits arcs ne sera pas tout-à-fait un pouce, quoique la différence des hauteurs soit d'un pied comme précédemment; et si l'on conçoît que la hauteur des arcs construits sur la même base ou corde de cent pieds, se réduise à un pouce ou deux, par là même, la différence de leurs longueurs deviendra moindre que la cent cinquantième partie d'un pouce.

Nous voyons par là que le rayon rectiligne ou la trajectoire rectiligne que décrit la lumière en allant d'un point à un autre, doit être considéré comme ayant une *longueur déterminée*, par rapport à toutes les lignes d'une forme et d'une position peu différentes que l'on peut mener entre les mêmes extrémités. Si, au contraire, les extrémités de la trajectoire lumineuse ne se confondent pas avec celles de la ligne qui l'avoisine, alors elle aura une longueur *variable*. Pour trouver la loi de cette variation qui offre le cas le plus simple de la seconde loi générale que nous nous sommes proposé de démontrer, reprenons le rapport des longueurs V, V_ε de deux lignes voisines, que nous avons donné plus haut, et supposons que ces deux lignes n'aient plus leurs points extrêmes superposés, ou en d'autres termes, que les fonctions ξ, η, ζ, ne s'évanouissent plus aux limites de l'intégrale: alors, en intégrant par parties, il faudra ajouter à la dernière expression (4) de la limite de

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(V_\varepsilon - V),$$

le termes suivans

$$\xi\frac{dx}{dV}+\eta\frac{dy}{dV}+\zeta\frac{dz}{dV}+\zeta'\frac{d'x'}{d'V}+\eta'\frac{d'y'}{d'V}+\zeta'\frac{d'z'}{d'V},$$

qui appartiennent aux extrémités de la ligne donnée; les termes accentués sont les quantités initiales, et d' se rapporte aux changemens infiniment petits produits par le mouvement du point initial le long de l'élément initial de la ligne, de sorte que $d'V$

est cet élément initial pris négativement,

$$d'V = -\sqrt{d'x'^2 + d'y'^2 + d'z'^2}; \quad . \quad . \quad (11)$$

lorsqu'ainsi la dernière intégrale (4) s'évanouit, en supposant la ligne primitive droite, et que l'on compare cette ligne avec une autre infiniment rapprochée, la loi de la *longueur variable* est exprimée par l'équation suivante :

$$\lim. \frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V) = \xi\frac{dx}{dV} + \eta\frac{dy}{dV} + \zeta\frac{dz}{dV} + \xi'\frac{d'x'}{d'V} + \eta'\frac{d'y'}{d'V} + \zeta'\frac{d'z'}{d'V},$$

$$= (\xi - \xi')\frac{dx}{dV} + (\eta - \eta')\frac{dy}{dV} + (\zeta - \zeta')\frac{dz}{dV}, \quad . \quad (12)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\delta V = \frac{dx}{dV}(\delta x - \delta x') + \frac{dy}{dV}(\delta y - \delta y') + \frac{dz}{dV}(\delta z - \delta z'), \quad (13)$$

d'où l'on voit que la longueur $V + \delta V$ d'une autre ligne qui diffère infiniment peu du rayon rectiligne par sa forme et sa position, peut être considérée comme égale à sa projection sur ce rayon.

Il faut observer que, dans quelques cas particuliers, on peut rendre la distance de deux lignes moindre qu'une quantité donnée, sans que pour cela leurs longueurs tendent vers l'égalité. Ainsi, qu'on subdivise une droite donnée en un grand nombre de parties égales ou inégales, et que sur chacune d'elles on construise un demi-cercle; alors la ligne qui enveloppera toutes ces petites demi-circonférences, sera toujours peu distante de la droite et pourra s'en rapprocher autant qu'on voudra, quoique sa longueur ne tende pas à devenir égale à celle de cette droite, mais soit toujours à l'égard de celle-ci dans un rapport plus grand que l'unité, par exemple dans le rapport de π à 2. Mais les cas semblables sont exclus du raisonnement précédent qui suppose

qu'une des lignes se rapproche de la forme de l'autre, en même temps que leur distance mutuelle diminue.

La loi de *la longueur variable* d'un rayon rectiligne conduit naturellement à conclure (ce que l'on peut prouver d'une autre manière) que les rayons rectilignes divergeant d'un point donné x', y', z', ou convergeant vers un point donné x, y, z, sont coupés perpendiculairement par une série de sphères concentriques dont l'équation est

$$V = \text{const.}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ou, plus généralement, que si un faisceau de rayons rectilignes est perpendiculaire à une surface donnée, ces rayons sont perpendiculaires aussi à une série de surfaces déterminées par l'équation (14), c'est-à-dire, par la condition que la partie d'un rayon interceptée entre deux surfaces de la série aura une longueur constante. D'autres conséquences analogues peuvent être déduites de la loi d'une action variable.

Il peut être utile de s'arrêter davantage au cas des trajectoires rectilignes et aux conséquences de la supposition mathématique d'une communication lumineuse ou visuelle comme étant l'effet d'un mouvement de point à point le long d'une ligne droite mathématique ou rayon, avant de passer aux propriétés d'autres trajectoires moins simples.

C'est une conséquence naturelle de cette supposition que d'un point quelconque (A), considéré comme initial, on peut concevoir la lumière, si elle n'éprouve pas d'obstacles, comme procédant vers tout autre point (B) considéré comme final, le long d'un rayon déterminé ou d'une trajectoire linéaire : sa direction étant droite, elle demeure la même quels que soient les points limites vers lesquels elle va aboutir; mais sa longueur et sa position dépendent de la place des limites et admettent des variétés infinies, correspondant aux variétés infinies qu'on peut imaginer dans la manière de lier les points deux à deux. De manière que si nous exprimons par une série de nombres les places des points initiaux et finaux ; et, par une autre série, la

longueur et la position du rayon, les nombres de la dernière série doivent, en langage mathématique, être fonctions des premiers, et pouvoir en être déduits par certains principes fixes de calcul. Il est un problème aisé mais fondamental pour faire cette déduction ; on peut le résoudre de la manière suivante.

Rapportons A et B à un système commun de trois axes rectangulaires OX, OY, OZ divergeant d'une même origine O ; désignons les coordonnées positives ou négatives du point final B, *vers* lequel se dirige la lumière, par x, y, z, et représentons également les coordonnées correspondantes du point initial A, *dont* émane la lumière, par les lettres x', y', z', que V soit la longueur de la ligne droite au rayon AB, et α, β, γ les cosinus *positifs* ou négatifs des angles aigus ou obtus que la direction de ce rayon forme avec les axes positifs des coordonnées. Le problème consiste alors à déterminer les lois de la dépendance fonctionnelle du nombre positif V, et des trois nombres positifs ou négatifs α, β, γ avec les six nombres positifs ou négatifs x, y, z, x', y', z' ; et la solution de ce problème se trouve évidemment dans les formules suivantes :

$$V=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}; \quad . \quad (15)$$

$$\alpha=\frac{x-x'}{V},\ \beta=\frac{y-y'}{V},\ \gamma=\frac{z-z'}{V} \quad . \quad . \quad (16)$$

C'est un corollaire simple mais néanmoins important de cette solution, que les expressions des trois cosinus des directions α, β, γ données par les équations (16), se lient à l'expression de la longueur V, que donne la formule (15), de façon qu'on peut écrire

$$\alpha=\frac{\delta V}{\delta x},\ \beta=\frac{\delta V}{\delta x},\ \gamma=\frac{\delta V}{\delta z}; \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

δ étant ici une caractéristique de différentiation partielle,

Nous avons aussi

$$\alpha = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \beta = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z'}; \quad . \quad . \quad (18)$$

en différentiant la fonction V par rapport aux coordonnées initiales. Comme d'ailleurs les trois cosinus des angles α, β, γ sont évidemment liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

nous voyons que la fonction V satisfait simultanément à ces deux équations aux différentielles partielles, du premier ordre et du second degré,

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20)$$

les équations (17), (18), (20) recevront bientôt une extension considérable ; mais il était bon de les signaler ici parce qu'elles contiennent le germe de la méthode générale pour la recherche des trajectoires de la lumière et des planètes, par les coefficiens différentiels partiels d'une *fonction caractéristique*. Quant aux équations (17) et (18) qui renferment les coefficiens du premier ordre de la fonction V, c'est-à-dire, dans le cas actuel, de la longueur, on peut les considérer comme les équations du rayon rectiligne qui passe, avec une direction donnée, par un point initial ou un point final déterminé : j'ai trouvé des équations analogues pour toutes les autres trajectoires de la lumière et même pour les orbites planétaires sous l'influence de leurs attractions réciproques.

Quand on met les équations (16) sous la forme

$$x - x' = \alpha V, \ y - y' = \beta V, \ z - z' = \gamma V, \quad . \quad (21)$$

elles donnent évidemment par la différentiation

$$dx = \alpha dV,\ dy = \beta dV,\ dz = \gamma dV, \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

et par suite

$$dV^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23):$$

le symbole d se rapporte ici à un changement infiniment petit du point final B, par un mouvement le long du rayon prolongé jusqu'à son extrémité; de manière que les équations (22) peuvent être considérées comme des équations différentielles de ce rayon. Elles fournissent les expressions

$$\alpha = \frac{dx}{dV},\ \beta = \frac{dy}{dV},\ \gamma = \frac{dz}{dV}, \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

qui, d'après (23), peuvent prendre la forme

$$\alpha = \frac{\delta dV}{\delta dx},\ \beta = \frac{\delta dV}{\delta dy},\ \gamma = \frac{\delta dV}{\delta dz}, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

δ désignant toujours une différentiation partielle, et dV étant considérée comme une fonction de dx, dy, dz.

En comparant les expressions (25) et (17), on obtient les résultats suivans, que nous verrons bientôt être d'une grande généralité et que nous étendrons d'une manière analogue à toutes les trajectoires de la lumière,

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta dV}{\delta dx},\ \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta dV}{\delta dy},\ \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta dV}{\delta dz}, \quad . \quad (26)$$

Il ne faut pas prendre ces équations comme identiques; car les quantités des premiers membres sont des coefficiens différentiels partiels d'une fonction V, tandis que celles du second membre sont les coefficiens d'une autre fonction dV.

De même, si nous employons, comme précédemment, la

caractéristique d' pour marquer les changemens infiniment petits provenant d'un changement du point initial A, par un mouvement le long de l'élément initial du rayon, nous aurons les équations différentielles

$$d'x' = -\alpha d'V\,,\ d'y' = -\beta d'V\,,\ d'z' = -\gamma d'V\,, \qquad (27)$$

d' V étant, comme plus haut, l'élément initial pris négativement, de manière que

$$d'V^2 = d'x'^2 + d'y'^2 + d'z'^2\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

nous avons par là,

$$\alpha = -\frac{\delta d'V}{\delta d'x'}\,,\ \beta = -\frac{\delta d'V}{\delta d'y'}\,,\ \gamma = -\frac{\delta d'V}{\delta d'z'}\,, \quad . \qquad (29)$$

et conséquemment, d'après (18),

$$\frac{\delta V}{\delta x'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'x'}\,,\ \frac{\delta V}{\delta y'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'y'}\,,\ \frac{\delta V}{\delta z'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'z'}\,. \quad . \qquad (30)\,;$$

on peut appliquer à ces résultats les remarques faites pour les équations (26).

La loi générale de l'action déterminée, en optique, peut maintenant s'établir comme il suit.

La quantité optique nommée *action*, pour toute trajectoire lumineuse ayant i points de réflexion ou de réfraction subite, et ayant par conséquent $i+1$ branches, est la somme de $i+1$ intégrales séparées,

$$\textit{Action} = V = \Sigma \int dV^{(r)} = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)}$$
$$+ \ldots + V^{(r)} + \ldots + V^{(i+1)}\,, \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

dont chaque terme est déterminé par une équation de la

forme

$$V^{(r)} = \int dV^{(r)} = \int v^{(r)} \sqrt{dx^{(r)2} + dy^{(r)2} + dz^{(r)2}}, \quad (32)$$

le coefficient $v^{(r)}$ de l'élément de la trajectoire, dans le milieu $r^{ième}$, dépendant, dans le cas le plus général, des propriétés optiques de ce milieu, de la position, de la direction et de la couleur de cet élément, conformément aux principes découverts par l'expérience; de sorte que, par exemple, si le $r^{ième}$ milieu est ordinaire, $v^{(r)}$ est l'index pour ce milieu; ainsi $dV^{(r)}$ est toujours une fonction homogène de première dimension des différentielles $dx^{(r)}$, $dy^{(r)}$, $dz^{(r)}$, qui peut en renfermer aussi les coordonnées non différentiées $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$ elles-mêmes, et la *forme* générale de sa variation est

$$\delta dV^{(r)} = \sigma^{(r)}\, \delta dx^{(r)} + \tau^{(r)}\, \delta dy^{(r)} + \nu^{(r)}\, \delta dz^{(r)}$$
$$+ \left(\frac{\delta v^{(r)}}{\delta x^{(r)}} \delta x^{(r)} + \frac{\delta v^{(r)}}{\delta y^{(r)}} \delta y^{(r)} + \frac{\delta v^{(r)}}{\delta z^{(r)}} \delta z^{(r)} \right) ds^{(r)} \quad (33)$$

lorsque pour abréger, l'on fait

$$\sigma^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dx^{(r)}},\ \tau^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dy^{(r)}},\ \nu^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dz^{(r)}}, \quad . \quad (34)$$

et

$$ds^{(r)} = \sqrt{dx^{(r)2} + dy^{(r)2} + dz^{(r)2}} \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

L'homogénéité de $dV^{(r)}$ donne aussi

$$dV^{(r)} = \sigma^{(r)}\, dx^{(r)} + \tau^{(r)}\, dy^{(r)} + \nu^{(r)}\, dz^{(r)} \quad . \quad . \quad (36).$$

Transformons les coordonnées $x^{(r)}$ $y^{(r)}$ $z^{(r)}$ de la trajectoire lumineuse en d'autres

$$\underset{\varepsilon}{x}^{(r)},\ \underset{\varepsilon}{y}^{(r)},\ \underset{\varepsilon}{z}^{(r)},$$

données par les équations

$$\underset{\varepsilon}{x}^{(r)} = x^{(r)} + \varepsilon\xi^{(r)},\ \underset{\varepsilon}{y}^{(r)} = y^{(r)} + \varepsilon\eta^{(r)},\ \underset{\varepsilon}{z}^{(r)} = z^{(r)} + \varepsilon\zeta^{(r)}, \quad (37)$$

ε étant une constante très-petite, et

$$\xi^{(r)},\ \eta^{(r)},\ \zeta^{(r)},$$

des fonctions de ε et des coordonnées $x^{(r)} y^{(r)} z^{(r)}$ qui ne deviennent pas infinies pour $\varepsilon = o$, ni pour un point quelconque de la $r^{\text{ème}}$ partie de la trajectoire, et qui au point de rencontre de deux quelconques de ces parties, satisfont à l'équation de la surface réfléchissante ou dirimante qui lui correspond, et s'évanouissent aux extrémités de la trajectoire; nous passerons ainsi à une ligne voisine de la trajectoire lumineuse, ayant les mêmes extrémités, et les points où elle se brise sur les mêmes surfaces refléchissantes ou dérimantes: or, d'après la loi de *l'action déterminée,* si nous comparons l'intégrale ou la somme $V = \Sigma\int dV^{(r)}$ relative à la trajectoire lumineuse, avec l'intégrale correspondante V_ε de la ligne en question, la différence de ces deux intégrales ou actions est à la quantité η (en vertu de laquelle l'une des lignes diffère de l'autre) dans un rapport décroissant à l'infini, lorsque cette quantité η décroît elle-même à l'infini: de sorte que l'équation aux limites est

$$\text{lim.}\ \frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V) = o \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

ou

$$\text{lim.}\ \Sigma\frac{1}{\varepsilon}(V^{(r)}_\varepsilon - V^{(r)}) = \Sigma\int \text{lim.}\ \frac{1}{\varepsilon}(dV^{(r)}_\varepsilon - dV^{(r)}) = o, \quad (39)$$

ou bien

$$\Sigma\int\left(\frac{\delta dV^{(r)}_\varepsilon}{\delta\varepsilon}\right) = o \quad \ldots\ldots \quad (40).$$

Pour développer cette équation, nous avons (33) et (37)

$$\left(\frac{\delta dV^{(r)}_\varepsilon}{\delta\varepsilon}\right) = \sigma^{(r)}\, d\xi^{(r)} + \tau^{(r)}\, d\eta^{(r)} + \nu^{(r)}\, d\zeta^{(r)}$$

$$+\left(\xi^{(r)}\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta x^{(r)}} + \eta^{(r)}\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta y^{(r)}} + \zeta^{(r)}\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta z^{(r)}}\right) ds^{(r)}; \quad (41)$$

intégrant par parties, et accentuant les symboles qui se rapportent au commencement de la $r^{\text{ème}}$ partie de la trajectoire, il vient :

$$\int\left(\frac{\delta d\mathrm{V}_\varepsilon^{(r)}}{\delta\varepsilon}\right)=\sigma^{(r)}\xi^{(r)}-\sigma'^{(r)}\xi'^{(r)}+\tau^{(r)}\eta^{(r)}-\tau'^{(r)}\eta'^{(r)}$$
$$+\upsilon^{(r)}\zeta^{(r)}-\upsilon'^{(r)}\zeta'^{(r)}$$
$$+\int\xi^{(r)}\left(\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta x^{(r)}}ds^{(r)}-d\sigma^{(r)}\right)$$
$$+\int\eta^{(r)}\left(\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta y^{(r)}}ds^{(r)}-d\tau^{(r)}\right)$$
$$+\int\zeta^{(r)}\left(\frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta z^{(r)}}ds^{(r)}-d\upsilon^{(r)}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Puisque les valeurs extrêmes et les valeurs relatives aux points de jonction des autres fonctions arbitraires ξ, η, ζ, sont assujetties aux conditions suivantes :

$$\xi'^{(1)}=o,\ \eta'^{(1)}=o,\ \zeta'^{(1)}=o,\ \xi^{(i+1)}=o,\ \eta^{(i+1)}=o,\ \zeta^{(i+1)}=o,\quad (43)$$

et

$$\xi^{(r)}=\xi'^{(r+1)},\ \eta^{(r)}=\eta'^{(r+1)},\ \zeta^{(r)}=\zeta'^{(r+1)},\qquad (44)$$

r variant depuis 1 jusqu'à i; et que de plus, pour chaque valeur de r entre les mêmes limites, elles doivent satisfaire à la condition

$$n_x^{(r)}\xi^{(r)}+n_y^{(r)}\eta^{(r)}+n_z^{(r)}\zeta^{(r)}=o \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$n^{(r)}$ étant chaque demi-normale à la $r^{\text{ème}}$ surface réfléchissante ou dirimante au point $r^{\text{ème}}$ d'incidence, et

$$n_x^{(r)}, n_y^{(r)}, n_z^{(r)},$$

étant les cosinus des angles que $n^{(r)}$ fait avec les trois demi-axes rectangulaires positifs des coordonnées x, y, z : la loi de l'ac-

tion déterminée (40) se réduit aux équations suivantes :

$$d\sigma^{(r)} = \frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta x^{(r)}} ds^{(r)}; \; d\tau^{(r)} = \frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta y^{(r)}} ds^{(r)}; \; d\nu^{(r)} = \frac{\delta\nu^{(r)}}{\delta z_{(r)}} ds^{(r)}; \quad (46)$$

et

$$\sigma'^{(r+1)} - \sigma^{(r)} = \lambda^{(r)} n_x^{(r)}; \;\; \tau'^{(r+1)} - \tau^{(r)} = \lambda^{(r)} n_y^{(r)}; \quad (47)$$
$$\nu'^{(r+1)} - \nu^{(r)} = \lambda^{(r)} n_z^{(r)};$$

$\lambda^{(r)}$ étant un multiplicateur indéterminé. Les trois équations (46) qui doivent avoir lieu en même temps en vertu de la condition (36), expriment les changemens graduels, s'il y en a, d'un rayon, entre ses points de soudaine réflexion et les équations (47) renferment les lois de la réflexion et de la réfraction ordinaire et extraordinaire. Tous ces résultats de la loi connue que j'ai désignée sous le nom de *loi de l'action déterminée*, sont pleinement confirmés par l'expérience, en donnant une forme convenable aux fonctions dénotées par $\nu^{(r)}$.

Ainsi, dans le cas d'un milieu uniforme, ordinaire ou extraordinaire, la fonction $\nu^{(r)}$ doit être considérée comme indépendante des coordonnées non différenciées $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, et les équations différentielles (46) de la $r^{\text{ème}}$ partie de la trajectoire lumineuse deviennent simplement

$$d\sigma^{(r)} = 0, \;\; d\tau^{(r)} = 0, \;\; d\nu^{(r)} = 0, \quad (48)$$

et donnent par l'intégration

$$\sigma^{(r)} = \text{const.}, \;\; \tau^{(r)} = \text{const.}, \;\; \nu^{(r)} = \text{const.}; \quad (49)$$

ces équations expriment le fait connu de la propagation rectiligne de la lumière dans un milieu uniforme, parce que dans un pareil milieu, $\sigma^{(r)}$, $\tau^{(r)}$, $\nu^{(r)}$ dépendent simplement de la couleur et de la direction, mais non des coordonnées de la trajectoire, et sont des fonctions de $\alpha^{(r)}$, $\beta^{(r)}$, $\gamma^{(r)}$ qui ne renferment pas

$x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, en faisant, pour abréger,

$$\alpha^{(r)} = \frac{dx^{(r)}}{ds^{(r)}}, \quad \beta^{(r)} = \frac{dy^{(r)}}{ds^{(r)}}, \quad \gamma^{(r)} = \frac{dz^{(r)}}{ds^{(r)}}, \qquad (50)$$

de sorte que $\alpha^{(r)}$, $\beta^{(r)}$, $\gamma^{(r)}$ représentent les cosinus de l'inclinaison (constante dans ce cas) d'un élément de la $r^{\text{ème}}$ partie de la courbe sur les demi-axes positifs des coordonnées. Les formules (46) donnent ainsi les équations différentielles connues de la trajectoire décrite par un rayon lumineux qui traverse l'atmosphère terrestre.

Quant aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière exprimées par les équations (47), elles peuvent être comprises dans l'équation

$$t_x^{(r)}\,\Delta\sigma^{(r)} + t_y^{(r)}\,\Delta\tau^{(r)} + t_z^{(r)}\,\Delta\nu^{(r)} = o \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Δ se rapporte ici aux changemens subits produits par réflexion ou par réfraction, et

$$t_x^{(r)},\ t_y^{(r)},\ t_z^{(r)}$$

sont les cosinus des inclinaisons sur les demi-axes des coordonnées, d'une ligne arbitraire $t^{(r)}$ qui touche la $r^{\text{ème}}$ surface réfléchissante ou dirimante, au point $r^{\text{ème}}$ d'incidence, de façon que

$$t_x^{(r)}\,n_x^{(r)} + t_y^{(r)}\,n_y^{(r)} + t_z^{(r)}\,n_z^{(r)} = o \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Ainsi, par exemple, dans le cas d'un milieu ordinaire, nous avons

$$\sigma^{(r)} = \nu^{(r)}\,\alpha^{(r)}, \quad \tau^{(r)} = \nu^{(r)}\,\beta^{(r)}, \quad \nu^{(r)} = \nu^{(r)}\,\gamma^{(r)}; \quad . \quad (53)$$

et l'équation (51) peut être mise sous la forme

$$\Delta_o\,\nu^{(r)}\,\nu_t^{(r)} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54),$$

où

$$\nu_t^{(r)} = \alpha^{(r)}\,t_x^{(r)} + \beta^{(r)}\,t_y^{(r)} + \gamma^{(r)}\,t_z^{(r)} \quad . \quad . \quad . \quad (55);$$

de sorte que la quantité

$$\nu^{(r)}\,\nu^{(r)}_{t}$$

qui ne change pas, est la projection de l'indice $\nu^{(r)}$ sur la tangente arbitraire $t^{(r)}$, chaque indice étant mesuré à partir du point d'incidence dans la direction du rayon correspondant; ce qui est conforme à la loi de *Snellius*. En général, si nous posons

$$\nu^{(r)} = \sqrt{\sigma^{(r)2} + \tau^{(r)2} + \upsilon^{(r)2}}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

et

$$\sigma^{(r)} = \nu^{(r)}\,\nu^{(r)}_{x},\ \tau^{(r)} = \nu^{(r)}\,\nu^{(r)}_{y},\ \upsilon^{(r)} = \nu^{(r)}\,\nu^{(r)}_{z}, \quad . \quad (57)$$

nous pourrons considérer $\sigma^{(r)}$, $\tau^{(r)}$, $\upsilon^{(r)}$, comme les projections sur les axes des coordonnées d'une certaine ligne droite $\nu^{(r)}$, dont la longueur et la direction dépendront (en vertu de ce qui précède) de la forme de la fonction $\nu^{(r)}$ ou $d\mathrm{V}^{(r)}$, et de la direction et de la couleur de l'élément de la trajectoire lumineuse, avant ou après l'incidence ; et en faisant

$$\nu^{(r)}_{t} = \nu^{(r)}_{x}\,t^{(r)}_{x} + \nu^{(r)}_{y}\,t^{(r)}_{y} + \nu^{(r)}_{z}\,t^{(r)}_{z}, \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

l'équation (51) deviendra

$$\Delta.\ \nu^{(r)}\,\nu^{(r)}_{t} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

ce qui exprime que la projection de cette droite $\nu^{(r)}$ sur une tangente arbitraire $t^{(r)}$ menée à la surface réfléchissante ou dirimante, par le point d'incidence, n'est pas changée après la réflexion ou la réfraction ordinaire ou extraordinaire ; et nous donne une formule générale qui satisfait d'une manière convenable à toutes les lois connues des changemens subits d'une trajectoire lumineuse. Dans la théorie des ondulations, j'ai trouvé que la ligne $\nu^{(r)}$ est réciproque à la vitesse normale de propagation de l'onde ; on peut donc appeler ses projections les *composantes du retardement normal :* de sorte que la propriété

de demeurer constante dont jouit la ligne $\nu^{(r)}$, d'après ce que nous avons trouvé plus haut, peut s'énoncer, dans le langage adopté pour cette théorie, en disant que la composante du retardement normal dans la direction d'une ligne qui touche en un point d'incidence une surface réfléchissante ou dirimante ordinaire ou extraordinaire, ne change pas en vertu de la réflexion ou de la réfraction. Ce fut au reste par une autre méthode que je parvins primitivement à cet énoncé général des lois de la réflexion et de la réfraction : je fis usage en particulier de mon principe de la fonction caractéristique, et d'une autre loi générale dont je vais parler.

(*La suite à la prochaine livraison*)

De la forme des surfaces lumineuses produites par réflexion sur un miroir sphérique qui a un point lumineux à l'un de ses foyers approximatifs, et sur l'interférence qui a lieu près des arêtes de rebroussement de ces surfaces. (Extrait d'une lettre de M. POTTER de Manchester.)

En faisant des expériences sur la formation des miroirs, d'après ma méthode pour leur donner les figures produites par la révolution des sections coniques autour de leurs grands axes (1), je fus conduit à comparer l'effet des nouveaux miroirs à celui produit par des miroirs sphériques semblables, afin d'avoir une idée exacte de la bonté de mon nouveau mode de travail. Dans quelques-unes de ces comparaisons, où j'avais monté un miroir sphérique, d'une large ouverture relativement à sa distance focale, avec une simple lentille, comme un microscope réflecteur, et où je me servais, au lieu d'un objet réel fixé au foyer du miroir, de l'image produite sur une petite goutte de mercure par la flamme d'une chandelle; je trouvai que le large cercle

(1) Voyez le *Journal des sciences* d'Edimbourg.

d'aberration était composé d'anneaux alternativement clairs et obscurs. Lorsque l'image du soleil fut substituée à celle de la chandelle, l'apparence était très-brillante et très-belle et ne le cédait en splendeur à aucun des phénomènes d'interférence.

En recherchant la cause de ces anneaux, nous pouvons considérer l'image du soleil ou de la chandelle, produite par le petit globule de mercure, comme un point lumineux et les surfaces lumineuses qui en émanent comme sphériques; après la réflexion, ces surfaces prennent une figure beaucoup plus compliquée que nous allons examiner.

Si Qa, Qb (fig. 1) sont deux rayons infiniment voisins l'un de l'autre, émanant du point lumineux Q; aq, bq leurs directions après la réflexion, lorsque am est mené perpendiculairement sur Qb, et bn sur aq, les points a et m appartiendront à la même surface sphérique; mais an est égal à bm et par là lorsque la particule a arrive en n, la particule m arrive en b (je continuerai à me servir de la théorie qui suppose que la lumière est une matière émise, parce que, pour des raisons que j'ai fait connaître ailleurs, je la crois plutôt la vraie théorie que celle des ondulations) la direction des rayons sera toujours normale à la surface réfléchie : le point d'intersection en q sera ainsi le centre de courbure de cette surface pour les particules b et n dans tous les points de leurs trajectoires après la réflexion; mais le point q est sur la caustique, cette courbe est évidemment la développée des surfaces lumineuses à toutes les distances du miroir. Ceci est une considération importante, car lorsque nous connaissons la forme de la caustique, qui est constante pour chaque position du point Q, nous pouvons aisément trouver d'une manière géométrique la forme de la courbe lumineuse pour chaque position ou succession de position. Il y aura toujours une arête de rebroussement où la courbe lumineuse touche la caustique; les côtés convexes sont, comme on peut le voir par la fig. 2 gq, eq, tournés l'un vers l'autre. Considérant le problème dans les trois dimensions, nous dirons plus généralement qu'il y a toujours une arête de rebroussement où la surface lumineuse touche la surface caustique.

Nous pouvons parvenir à la même conclusion au moyen de la propriété connue des cata-caustiques, que la longueur d'un des arcs est égale à la différence entre la longueur des deux rayons extrêmes formant cet arc, comptés de l'origine lumineuse aux points de tangence de l'arc et de la caustique. Ceci peut être facilement vu d'après la fig. 1. Pour connaître la distance variable $Qb + bq = \rho$, la distance $qq_{,}$ de l'intersection de trois rayons consécutifs infinement voisins est visiblement la différentielle de ρ, mais $qq_{,}$ est aussi la différentielle de l'arc de la caustique, et nommant s cet arc, nous devons avoir $\int d\rho = -\int ds$. L'origine de la caustique est au foyer principal F. De là $\rho = c - s$ lorsque $c =$ la distance QA + AF. Il suit de cette propriété que la distance $Qa + aq_{,} - q_{,}e$ (fig. 2.) est toujours égale à la distance $Qb + bq$ au point de rebroussement pour la portion inférieure de la courbe et $Qd + dq_{2} + q_{2}\, q$ égale à $Qb + bq$ pour la portion supérieure, lorsque eqg est développante de la caustique $q_{,}qq_{2}$.

La courbe, formée par la section de la surface lumineuse, peut rarement être exprimée par une équation algébrique suffisamment simple pour être de quelque utilité dans ces recherches; il y a cependant un cas important où nous pouvons avoir une approximation. Lorsque les ouvertures des lentilles ou miroirs sont étroites, l'approximation est assez forte pour qu'on puisse dire que l'aberration longitudinale varie comme le carré de l'ouverture: exprimant cette condition par les différentielles des coordonnées de la caustique (voyez *l'Optique* de *Coddington*, page 231, édition de 1829) et intégrant, nous obtenons comme solution particulière de l'équation primitive, l'équation d'une parabole semi-cubique, qui est donc approximativement la forme de toute caustique, qui a lieu lorsque l'ouverture est très-petite. Mais, dans le cas de la lumière réfléchie que nous considérons, la courbe lumineuse est, dans toutes les situations, une développante de la caustique, qui étant finalement une parabole semi-cubique, la portion centrale de la courbe lumineuse doit être dans une de ses positions, à peu près une parabole ordinaire. L'équation de la caustique étant approximativement:

$$x^3 = \frac{27}{4} a y^2 ;$$

après avoir trouvé la valeur de la partie constante de cette expression pour tous les miroirs et positions du point lumineux, nous pouvons facilement trouver la position et la forme de la parabole conique qui en est la développante, et les positions simultanées relatives des particules lumineuses sur les normales à toutes les distances désirables (1) peuvent être assignées.

En se servant d'un petit globule de mercure afin de former un point lumineux, il y aura une aberration de sa figure sphérique, et l'aberration totale est rigoureusement l'effet des deux aberrations opposées; l'erreur qu'on fait, en considérant l'image du soleil sur un très-petit globule comme un point lumineux, est très-faible et peut être négligée dans les expériences *ordinaires*.

Pour revenir à l'expérience mentionnée au commencement de cet article, si nous prenons la position de la surface lumineuse pour laquelle les rayons réfléchis du bord du miroir coupent l'axe, nous aurons une figure produite par la révolution de *frl* fig. 2, et c'est la meilleure position dans laquelle nous puissions voir l'effet de l'interférence dans le microscope, en plaçant ce point au foyer de l'oculaire. Nous évitons alors l'effet de la diffraction qui est concentrée près du point *f*. Les branches postérieures et antérieures de la courbe étant très-rapprochées vers le point *r*, doivent produire une interférence, et former, dans le cas général, autour de l'axe du miroir, des anneaux dont celui placé extérieurement sera le plus large, parce que la distance des branches y est moindre que vers l'intérieur. C'est ce qui a lieu en effet. L'expérience nous montre aussi que ces anneaux, d'abord alternativement brillans et sombres, finissent par devenir trop faibles et par être trop affectés du mé-

---

(1) On peut voir sur la théorie générale des caustiques, les différens mémoires insérés dans ce recueil.

lange des couleurs pour demeurer perceptibles. Il est une circonstance dans laquelle l'interférence produit un effet assez différent de celui auquel mènerait la théorie des ondulations. Il est facile de voir que les rayons dont est formé le bord extérieur de l'anneau extérieur au point *r*, auront parcouru des distances égales et doivent produire une ondulation d'une intensité double ; à partir de ce bord la lumière doit passer graduellement à une obscurité complète, l'on trouve néanmoins que la partie la plus brillante de l'anneau extérieur n'est pas sur le bord extrême, mais à l'intérieur et plus près du bord interne que du bord externe ; et que de plus l'obscurcissement du bord externe jusqu'au noir est parfaitement graduel.

Tel est le résultat qui devrait avoir lieu si les rayons de lumière arrivant sur la *même trajectoire* en juxta-position, détruisaient par l'interférence leurs effets lumineux réciproques au lieu de les augmenter. J'ai déjà montré ailleurs que ce résultat est d'accord avec la théorie de l'émission, et qu'il est appuyé sur plusieurs expériences. Il y a une objection sur la nature de cette expérience qui peut être tirée de la théorie des ondulations, savoir, que comme les ondulations auraient une arête de rebroussement tout le long de la surface caustique, nous ne voyons pas bien quel peut être l'effet de la propagation des mouvemens vibratoires près de cette arête. Je répondrai à cela que, bien qu'une légère propagation de mouvement des particules vibrantes du prétendu éther puisse avoir affecté le bord extrême, il ne se fait pas d'interférence avec les anneaux sombres de l'intérieur qui sont remarquablement noirs et bien terminés.

L'obscurcissement graduel du bord de l'anneau extérieur est visiblement coloré de pourpre dont on peut difficilement rendre compte dans la théorie des ondulations, et fournit, il me semble, un argument décisif contre elle. Mais c'est ce qui doit arriver dans le cas où cet anneau est considéré comme commençant à la partie sombre du bord extrême et s'étendant jusqu'à la partie claire, parce que les intervalles des surfaces lumineuses étant les plus petits pour la lumière violette, l'effet de

l'interférence par la juxta-position décroîtra plus rapidement que pour d'autres couleurs et, par là, la teinte pourpre prédominera, comme cela est sensible en effet.

En estimant l'intensité de la clarté près d'une caustique, la question doit plutôt être traitée comme appartenant à l'optique physique qu'à l'optique mathématique, car il n'est pas difficile de voir par la fig. 2, que, pour chaque point lumineux, il y a une série de bandes claires et sombres suivant à peu près la direction de la cata-caustique.

Dans le peu d'essais que j'ai faits pour produire avec une lentille le même effet qu'avec un miroir, je n'ai pas réussi. Je suis cependant parvenu, par une autre marche, à produire par la réfraction une apparence parfaitement identique. Ayant placé du baume de Canada fortement coloré au moyen de la matière colorante de la racine d'*alkanet* entre deux verres plans, il se trouva qu'il y eut une large bulle d'air près du bord. En regardant à travers cette bulle, placée près de l'œil, vers un point lumineux, je reconnus l'apparence d'anneaux comme dans les miroirs et extrêmement bien terminés. Ceci est certainement un cas d'aberration produite par une réfraction irrégulière. Je n'ai cependant pas pu réussir à imiter ceci au moyen de lentilles.

Il n'y aura pas de difficulté à discerner la différence entre les phénomènes que j'ai décrits et ceux de diffraction, pour les personnes qui auront vu une seule fois les premiers; l'intensité de la lumière dans les surfaces lumineuses est à peu près égale; les anneaux sombres ont dans leur centre une partie parfaitement noire, qui les distingue très-bien des anneaux faibles ou des bandes produites par la diffraction.

Smedley Hall, près de Manchester, le 2 décembre 1833.

Recherches sur les degrés successifs de force magnétique qu'une aiguille d'acier reçoit pendant les frictions multiples qui servent à l'aimanter; par A. Quetelet. (extrait des *Annales de Physique et de Chimie*, juillet 1833.)

I. *De l'objet de ce Mémoire.*

Des recherches nombreuses ont été faites à différentes époques sur l'aimantation des aiguilles et des barreaux d'acier; quelques-unes sont dues à des physiciens célèbres. Cependant, malgré les savans écrits publiés sur cette matière, plusieurs questions restent encore à résoudre. Il en est une particulièrement qui m'avait arrêté dans une série de recherches que j'avais entreprises sur le magnétisme terrestre; j'en cherchai vainement la solution, soit dans les traités de physique, soit dans les ouvrages qui concernent spécialement l'aimantation. Cette question, qui a pour objet la détermination des degrés successifs de force qu'une aiguille d'acier reçoit pendant les frictions multiples qui servent à l'aimanter, me parut assez intéressante pour me déterminer à essayer de la résoudre par des expériences directes.

Coulomb avait fait connaître, par des recherches très-délicates, les différens degrés de force que présente dans toute sa longueur une aiguille après l'aimantation; il pouvait être curieux de rechercher ce qui se passe pendant l'aimantation même, de manière à connaître la force magnétique d'un point déterminé d'une aiguille après un nombre donné de frictions.

La solution de la question que je viens d'énoncer et qui fait l'objet de ce Mémoire, m'a présenté de nombreuses difficultés tant dans la partie expérimentale que dans la recherche d'une formule qui pût exprimer fidèlement toutes les circonstances des observations. Il est bien difficile, en effet, que les frictions soient toujours parfaitement égales dans tout le cours des expériences et qu'on puisse éviter toutes les causes d'erreur. Ces

recherches m'ont conduit à quelques autres résultats que je crois intéressans pour la théorie du magnétisme en général, et que je ferai connaître successivement.

La plupart de mes expériences ont été faites depuis plusieurs années; et même, en 1830, en passant par Paris pour me rendre en Italie, j'en communiquai les principaux résultats à M. *Arago*. Cet illustre physicien voulut bien en faire part à l'Académie des Sciences, dans la séance du 12 juillet. Je sentais néanmoins le besoin de revenir sur les observations de détail, et de confirmer encore quelques résultats par des expériences nouvelles. C'est l'ensemble de ce travail que je présente dans ce Mémoire. Dans le cours de mes premières observations, je ne m'étais occupé que de l'aimantation d'aiguilles d'acier de forme cylindrique et de 6 à 7 centimètres de longueur, semblables à celles dont les voyageurs se servent ordinairement pour la détermination du magnétisme terrestre. Je m'aperçus bientôt que cette forme convenait peu pour arriver au but que je me proposais d'atteindre. Je substituai donc à ces aiguilles des barreaux parallélipipédiques de différentes grandeurs, dont les faces planes permettaient de faire les frictions avec plus de régularité.

La méthode d'aimantation que j'ai adoptée est celle du contact séparé; les deux barreaux glissans étaient inclinés sous un angle de dix degrés environ; les frictions avaient lieu en partant du milieu et en allant vers les extrémités de l'aiguille à aimanter. Toutefois, cette aiguille n'était point placée entre d'autres barreaux aimantés de crainte que le plus léger frottement sur les barreaux ne troublât son état magnétique.

Pour mesurer la force de l'aiguille après chaque friction, j'observais la durée de cent oscillations horizontales en la plaçant dans une petite chappe de papier suspendue à un fil de soie d'un décimètre de longueur environ et tel qu'il sort du cocon (1). J'avais aussi pris les précautions nécessaires pour

(1) Pour suspendre les barreaux, je réunissais plusieurs fils.

éviter les agitations de l'air, la torsion du fil, etc. Enfin, je me suis servi successivement pour compter le temps de deux chronomètres de *Molineux*.

Les expériences ont eu lieu dans une grande chambre dont la température était à peu près constante ; je n'ai donc point eu de corrections à faire de ce chef. Quant au fer qui pouvait se trouver dans la chambre, il devait, à la vérité, modifier la direction et l'intensité de l'action magnétique exercée par le globe, mais en ne le changeant pas de place et en ayant soin qu'il fût toujours à distance assez grande pour ne pas faire varier sensiblement, pendant les expériences, la résultante de toutes les forces qui agissaient sur l'aiguille, mes résultats ont pu être pris avec sûreté, puisque je n'avais d'ailleurs en vue que de déterminer les intensités relatives des forces que prenait l'aiguille pendant l'aimantation.

Cela posé, j'ai donné successivement à l'aiguille jusqu'à 30 doubles frictions ; et, à chaque double friction, j'observais la force que l'aiguille avait acquise ; à cet effet, je comptais à plusieurs reprises le nombre des secondes qu'elle employait à faire cent oscillations horizontales, en partant d'une même amplitude, et j'en déduisais la valeur moyenne pour dix oscillations. Les intensités étaient alors, comme on sait, en raison inverse des carrés de ces temps.

II. *De la détermination des accroissemens d'intensité magnétique que reçoit successivement une aiguille pendant l'aimantation.*

....La relation qui existe entre l'intensité totale I que peut prendre une aiguille ou un barreau, et la force i reçue après un nombre x de doubles frictions, peut se mettre sous la forme suivante :

$$i = \mathrm{I}\left(1 - \mu^{x^{\alpha}}\right);$$

équation dans laquelle μ et α sont deux constantes qui dépendent de la force de coertion de l'aiguille, de sa forme, de sa grandeur, de son poids, etc., en même temps que de la force des barreaux glissans.

On conçoit que μ est essentiellement une fraction, et que la courbe a une assymptote dont elle approche d'autant plus que x devient plus grand. La distance de cette assymptote à l'axe des abscisses auquel elle est parallèle est égale à I. D'une autre part, la courbe coupe son axe des abscisses, et l'intensité est nulle quand $x = 0$. De sorte que la courbe part de l'origine même, si l'aiguille n'a pas d'aimantation préalable; et elle coupe l'axe des x dans la région négative ou positive, selon que l'aiguille était déjà aimantée dans le sens de l'aimantation qui va s'opérer, ou dans un sens contraire.

Il se présente cependant ici une difficulté qu'il importe de lever avant tout; si l'aiguille était déjà aimantée dans le sens que l'on se propose de continuer, il suffirait de chercher le nombre de frictions auquel correspond cette force initiale, et d'en tenir compte dans le reste du calcul. Ainsi, je suppose que la force déjà acquise réponde à un nombre c de frictions, on continuera l'opération et le calcul en posant

$$i = \mathrm{I}\left(1 - \mu^{(x+c)^{\alpha}}\right)$$

x désignant le nombre des frictions ultérieures qu'on se proposerait de donner.

Mais si le magnétisme acquis était de nature différente à celle du magnétisme qu'on se propose de donner à l'aiguille, il faudrait regarder l'opération comme se composant de deux parties distinctes, l'une devant détruire préalablement le magnétisme acquis, et l'autre devant donner à l'aiguille, en partant de l'état zéro, un magnétisme de nature opposée. Or, tant que les pôles ne seraient pas renversés par l'aimantation, l'exposant aurait le signe négatif. La formule exprimerait cette double

circonstance de la manière suivante :

$$i = \mathrm{I}\left(1-\mu^{\pm(x\pm c)^{a}}\right)$$

en observant que la différence de x et de c doit toujours être prise positivement entre les parenthèses.

On a donc dans l'équation, sous la forme la plus générale, quatre constantes avec i et x, de sorte qu'il suffira de quatre observations pour déterminer entièrement la courbe, et de trois seulement quand l'aiguille n'était pas aimantée primitivement ou quand on connaît déjà sa force.

Je vais montrer maintenant, par un exemple, l'emploi de la formule précédente, et je prendrai de préférence la première série d'expériences que j'ai faites, quand je me suis livré aux recherches qui font l'objet de ce Mémoire.

L'aiguille employée était de forme cylindrique et présentait à ses extrémités deux pointes coniques d'une hauteur à peu près égale au rayon de la base. La longueur totale était de 64,5 millimètres et le poids de 5445 milligrammes.

Les barreaux qui servaient à l'aimantation, étaient d'acier anglais et avaient la forme de parallélipipèdes. Ils avaient exactement la même longueur (153 millimèt.) et les deux autres dimensions différaient très-peu; de sorte que l'un des barreaux pesait 86175 milligrammes et l'autre 85300. Le premier qui présentait quelques petites taches de rouille, faisait dix oscillations en 90″ et le second en 86″,56. En déterminant le moment statique de ces deux barreaux par la formule connue

$$m = \frac{\pi^2 \mathrm{P} l^2}{3 g \mathrm{T}^2},$$

on trouve 2234, 2 milligrammes pour le second barreau et 2088,2 pour le premier, c'est-à-dire que la force était la même que celle qu'auraient exercée les poids précédens suspendus à des bras de levier de 1 millimètre. Ces barreaux destinés à

opérer le renversement des pôles d'une aiguille d'inclinaison construite dans les ateliers de MM. *Troughton* et *Simms*, m'ont servi généralement dans la plupart des expériences dont j'aurai à parler.

On pourra d'abord, si l'on ne veut qu'une simple approximation, faire $I = 10$, puisque, après 30 frictions, l'intensité de l'aiguille était 9,675. De plus, pour déterminer μ, on se servira du nombre 2,665 représentant la force magnétique obtenue par la première friction, et on fera $x = 1$ et $c = 0$, en négligeant la très faible intensité magnétique qu'avait l'aiguille avant l'expérience, intensité qui n'était représentée que par 0,044 ; on aura

$$2{,}665 = 10\,(1 - \mu)\,,$$

d'où l'on déduit

$$\mu = 0{,}7335\,;$$

pour déterminer α, nous pourrons nous servir des valeur données par l'une quelconque des autres observations, et les porter dans l'équation

$$i = 10\left(1 - 0{,}7335^{x^{\alpha}}\right).$$

Commé alors on se donne i et x, il sera très-facile d'en déduire la valeur de α. On voit que nous n'avons fait concourir alors que trois observations à la détermination de la courbe des intensités. Il est évident que les nombres de l'équation varient avec les observations que l'on fait concourir à leur détermination. En prenant l'équation suivante, à la formation de laquelle j'ai fait concourir plusieurs observations,

$$i = 10\left(1 - 0{,}7523^{x^{0{,}663743}}\right)$$

on parvient aux résultats consignés dans le tableau ci-joint. Les intensités sont calculées non dans leur valeur absolue, mais

d'une manière relative et en prenant pour unité la force qu'aurait l'aiguille si elle employait 100 secondes de temps à faire 10 oscillations.

FRICTIONS.	INTENSITÉS observées.	INTENSITÉS calculées.	DURÉE DE 10 OSCILLAT. observée.	DURÉE DE 10 OSCILLAT. calculée.	DIFFÉRENCE.
1re	2,665	2,477	61″,25	63″,54	+2″,29
2e	3,639	3,630	52 ,42	52 ,49	+0 ,07
3	4,430	4,457	47 ,51	47 ,37	−0 ,14
4	5,086	5,105	44 ,34	44 ,26	−0 ,08
5	5,472	5,632	42 ,75	42 ,14	−0 ,61
6	5,745	6,074	41 ,72	40 ,58	−1 ,14
8	6,504	6,775	39 ,21	38 ,42	−0 ,79
10	7,433	7,308	36 ,68	36 ,99	+0 ,31
12	7,720	7,726	36 ,00	35 ,98	−0 ,02
16	8,656	8,385	34 ,00	34 ,68	+0 ,68
20	8,895	8,748	33 ,53	33 ,81	+0 ,28
30	9,675	9,342	32 ,15	32 ,72	+0 ,57

Les différences, comme l'on voit, excepté la première et la sixième, ne dépassent pas une seconde; et la manière dont elles se succèdent, quant aux signes, semble montrer qu'elles proviennent moins de la formule que des circonstances qui ont accompagné l'aimantation ou l'observation de l'intensité. Ces résultats pourront paraître satisfaisans, si l'on observe que l'expérience se prolonge pendant toute une journée, que l'observation de la durée des oscillations comporte ses erreurs, et que l'aimantation surtout expose à des différences assez considérables, car deux frictions sont rarement faites exactement dans les mêmes circonstances, et nous verrons bientôt qu'une seule friction suffit en général pour produire un renversement de pôles dans une aiguille même fortement aimantée. D'ailleurs une aimantation défectueuse influe nécessairement sur tous les résultats subséquens; on pourrait du reste, par l'emploi de la méthode des moindres carrés, trouver des constantes qui feraient accorder mieux encore les résultats du calcul avec ceux de l'expérience.

(Divers tableaux numériques viennent confirmer encore l'ac-

cord de la formule avec les résultats de l'expérience. Le reste du mémoire comprend les chapitres suivans :

III Examen particulier du cas du renversement des pôles d'une aiguille ou d'un barreau qu'on aimante.

IV Des relations qui existent entre la force des barreaux qu'on aimante et celle des barreaux qui servent à l'aimantation.

V Sur la possibilité de prévoir le résultat de l'aimantation avec le moins d'observations possibles.

Nous nous bornerons à présenter ici les *conclusions* qui résultent de l'ensemble de ce travail.)

1° Quand on aimante à saturation par la méthode du contact séparé, une aiguille ou un barreau qui n'avait point encore reçu l'aimantation, la force magnétique acquise est un *maximum* par rapport aux forces qu'on pourrait donner à cette même aiguille ou à ce même barreau par des renversemens subséquens des pôles.

2° La force magnétique que peut acquérir l'aiguille devient plus faible à mesure que les renversemens de pôles se multiplient.

Les séries de frictions qui tendent à ramener les pôles dans leur état primitif sont plus efficaces que les autres.

3° Cette différence entre les forces qu'acquiert l'aiguille, après les renversemens successifs des pôles, va continuellement en s'affaiblissant et converge vers une limite.

Elle dépend en général de la grandeur de l'aiguille par rapport à celle des barreaux glissans, ainsi que de sa force de coertion.

4° On ne donne point à une aiguille toute la force magnétique qu'elle peut acquérir, si les frictions n'ont pas lieu sur toute sa surface; ceci devient surtout sensible dans le renversement des pôles.

5° Les barreaux glissans donnent, toutes choses égales, aux barreaux de même dimension qu'eux, une force magnétique égale à celle qu'ils possèdent, et dans les barreaux de dimension différente, les forces acquises sont comme les cubes des dimensions homologues.

La dernière partie de cet énoncé est établie depuis long-temps par les expériences de Coulomb.

6° Quand on frictionne des barreaux aimantés avec d'autres barreaux plus faibles qu'eux, la force des premiers diminue au lieu d'augmenter, et il paraît que la force deviendrait celle que ces derniers barreaux seraient susceptibles de donner aux premiers par l'aimantation directe.

7° La relation qui existe entre les forces que reçoit une aiguille ou un barreau par des frictions successives et le nombre de ces frictions peut être exprimée par une formule exponentielle contenant trois constantes.

Une seule de ces trois constantes paraît changer de valeur avec la grandeur des barreaux qu'on aimante; du moins tant que ces barreaux conservent une grandeur qui n'excède pas celle des barreaux glissans, et qu'ils sont de même qualité d'acier. Ainsi l'on connaît d'avance les degrés successifs de force que va prendre un barreau à chaque friction, si l'on a déterminé préalablement la loi de ces accroissemens, pour les mêmes barreaux glissans, et pour un autre barreau quelconque qui doit servir de module. Si le barreau qu'on frictionne avait un commencement d'aimantation, il faudrait calculer d'abord le nombre de frictions auxquelles correspond cette force, afin de pouvoir assigner le rang des frictions subséquentes et la grandeur des forces magnétiques correspondantes.

8° Quand les barreaux glissans sont plus grands que le barreau qu'on aimante, dès la première friction complète, la force du magnétisme est à très peu près moitié de la force qu'aura le barreau aimanté dans son état définitif.

Après la douzième friction complète, la force magnétique diffère peu de celle que les barreaux glissans peuvent communiquer.

Photomètres, par MM. De Maistre, Quetelet et Arago (*Annales de Physique et de Chimie*, de *Poggendorf*, n° 9; 1833).

La photométrie, cette partie importante de l'optique, de laquelle au fond toutes les recherches en rapport avec les nombreux phénomènes de l'inflexion, de la réfraction, de l'absorption et de la polarisation, ont à attendre leurs appréciations numériques (1), la photométrie, disons-nous, a été depuis quelque temps l'objet de plusieurs recherches, que nous nous bornerons ici à faire connaître succinctement, bien qu'elles aient été dirigées en partie vers des buts spéciaux.

Afin de comparer l'éclat des corps célestes (2), le comte *De Maistre*, de St-Pétersbourg, a inventé l'instrument dont l'on voit une coupe dans la fig. 3. planche I. Il consiste en deux prismes: l'un de verre blanc, et l'autre, qui est ombré dans la figure, de verre bleu. Vers la base de la coupe transversale, l'épaisseur *ca* du prisme blanc est de 1 pouce 8 lignes; et l'angle aigu, *d* dans le blanc et *c* dans le bleu, est de 11 degrés. Ils sont disposés l'un sur l'autre de manière à former un parallélipipède; par ce moyen, l'on voit les objets dans leurs véritables directions. Lorsque l'on s'en sert, l'on amène la partie mince *bd* du prisme blanc devant l'objectif d'un télescope, et l'on fait glisser le prisme bleu jusqu'à ce que l'on trouve une épaisseur à travers laquelle l'éclat du corps céleste le plus brillant soit égal à celui

(1) Dans tous les phénomènes encore si compliqués que la lumière polarisée présente dans les cristaux quand on l'analise au moyen d'une tourtourmaline, l'explication revient toujours à déterminer l'intensité des rayons colorés simples de la lumière blanche pour chaque point du champ de la vision. P.

(2) *Wollaston* se proposait le même but dans sa méthode décrite dans ses *annales*, vol. XVI, pag. 328. P.

du corps le moins brillant. Une échelle, munie d'un micromètre, donne le point où cette égalité a lieu.

M. *Quetelet*, de Bruxelles, s'est servi d'un instrument semblable dans son principe ; il ne diffère du précédent qu'en ce que les deux prismes sont de verre coloré de même espèce. Les mesures sont aussi obtenues au moyen de l'épaisseur du parallélipipède, qu'on fait facilement varier au moyen d'une vis micrométrique qui fait glisser, d'un mouvement doux, les deux prismes l'un sur l'autre. Le défaut de cet instrument est le même que celui du précédent, à cause de l'impossibilité de trouver un verre qui ait la même qualité et la même teinte dans toute son étendue. Pour cette raison, *M. Quetelet* l'a rejeté et construit le suivant.

La construction de ce nouveau photomètre repose sur la diminution que la lumière subit par des réflexions répétées. On le voit dessiné dans la fig. 4, planche I, au quart de sa grandeur naturelle. Il consiste en deux parties : l'une A sert pour un nombre de réflexions pair ; l'autre B pour un nombre impair. Afin que la lumière subisse un nombre de réflexions pair, les deux faces de la plaque de verre a, a', a'', a''', doivent être parallèles ; l'une de ces faces doit être munie du triangle étamé $b'b'b'$, et l'autre d'un triangle semblable bbb. Les deux triangles sont rectangles, de même grandeur, situés dans la même direction ; ils ne se couvrent cependant pas si l'on regarde le verre perpendiculairement, mais sont disposés de manière que les cotés de celui de dessous dépassent ceux de celui de dessus, comme on le voit par la figure. Pour les réflexions impaires, l'on se sert de la partie B, formée comme la précédente de deux triangles rectangles étamés, appliqués sur les deux faces, avec la différence que le triangle de dessous est plus grand que celui de dessus, et qu'il est disposé de manière que ses trois côtés le dépassent, comme il est indiqué dans la figure.

Supposons qu'un rayon lumineux traverse la plaque et vienne tomber sur la bande étamée $b'cb'c$ du triangle tourné vers l'œil de l'observateur, il sera réfléchi vers le triangle bbb, et après y avoir subi une seconde réflexion, il sortira par la bande

bb'cb; la même chose arrivera après quatre, six ou un plus grand nombre de réflexions d'ordre pair. On augmente ce nombre en faisant tomber le rayon plus vers la base du triangle. L'on trouve facilement le nombre des réflexions en faisant aller l'œil du sommet à la base du triangle, et en comptant le nombre de fois que la partie *bb'cb* du triangle supérieur se répète sur le triangle inférieur. Les lignes de séparation de ces images sont très distinctes. . . . .

Pour des réflexions en nombre impair, l'on se sert de la partie B. On laisse tomber le rayon de lumière sur une des parties saillantes du grand triangle, et on l'observe à sa sortie sur l'autre partie. . . . . .

MM. Quetelet et *Plateau* (1) ont fait quelques recherches avec cet instrument et ont trouvé des résultats concordans; *ils* ont vu que, pour éteindre la lumière du soleil, il fallait 28 à 29 réflexions et que l'erreur ne pouvait pas dépasser une ou deux réflexions. La lumière des étoiles de première grandeur est éteinte après 20 réflexions.

Cet instrument n'est cependant pas non plus sans défaut; le verre, situé entre les deux miroirs, absorbe une partie des rayons d'autant plus grande, que les réflexions sont plus nombreuses; ce serait cependant peu de chose si l'on voulait en tenir compte. Afin d'éviter cet inconvénient, les auteurs ont proposé de mettre de côté la plaque de verre et de laisser les deux triangles réflecteurs à nu dans la même disposition. Ils ne se dissimulent pas cependant que cette disposition ne soit défectueuse; la lumière, d'après ce que *Brewster* a dit, se colorant après plusieurs réflexions sur le métal (2).

---

(1) Connu par ses intéressans travaux sur des illusions d'optique (§ ann. vol. XX, pag. 308); travail qui fut repris ensuite par M. *Faraday* sous une autre forme (ann. vol. XXII, pag. 601) et a conduit M. le professeur *Stampfer* à Vienne à la découverte de ses disques stroboscopiques qui sont si répandus aujourd'hui. P.

(2) Même lorsque la réflexion a lieu sur des verres non colorés, la lumière blanche se trouve toujours colorée, indépendamment de l'absorption et de l'interférence. A partir de l'incidence perpendiculaire jusqu'à l'angle de

Ce n'est pas la première fois que l'on se sert de réflexions répétées pour éteindre la lumière. Déjà en 1815, *Brewster*, dans les *Transactions* de la société royale d'Edimbourg a décrit un instrument qui, bien qu'il n'ait été appliqué par son auteur qu'à remplacer les verres colorés dans les observations sur le soleil, (1) ressemble dans sa construction à l'instrument de *M. Quetelet*. On le voit dans la figure 5, pl. I.

AB est une grosse plaque de verre, et si l'on n'avait pas de verre d'épaisseur suffisante, l'on pourrait attacher plusieurs plaques ensemble au moyen du baume de Canada. Les faces supérieure et inférieure de cette plaque, ou système de plaques, doivent être parallèles. Le rayon incident *sa* est ici affaibli par là

---

plus grande polarisation des rayons rouges, ces rayons violets sont réfléchis en plus grand nombre. Depuis l'angle de plus grande polarisation des rayons violets jusqu'à l'incidence parallèle, ce sont les rayons rouges qui sont réfléchis en plus grand nombre. Entre ces deux angles de polarisation, il y a une incidence pour laquelle le rapport primitif entre les rayons violets et rouges n'est pas changé par la réflexion, c'est pour ce motif que les rayons du milieu du spectre ne sont pas réfléchis en nombre convenable pour que la lumière puisse paraître entièrement blanche. Tout ceci est une suite nécessaire de la formule de *Fresnel* pour la lumière réfléchie.

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{tang.}^2\,(i-i')}{\text{tang.}^2\,(i+i')}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{sin.}^2\,(i-i')}{\text{sin.}^2\,(i+i')},$$

Dans laquelle, comme on peut le voir dans ces *annales*, § 100, pag. XXII, i désigne l'angle d'incidence, et i' l'angle de réfraction, l'on peut connaître ce dernier d'après la valeur du premier et d'après le rapport de réfraction n, car on a : $\sin. i' = n \sin i$. P.

(1) C'est dans la même vue que le mécanicien *Duwe* a fait un appareil en 1828, composé de deux verres noirs, assemblés comme dans l'appareil de polarisation. Mais, plus tard, il l'a composé de trois miroirs semblables, placés de manière qu'après trois réflexions dans l'angle de polarisation, les rayons réfractés à leur sortie fussent parallèles aux rayons incidens. En se servant d'une pareille combinaison pour l'oculaire d'un télescope, on lui trouve l'avantage sur les vers noirs ordinaires qu'elle ne présente pas seulement une image du soleil bien nette, mais aussi parfaitement blanche. P.

réflexion qu'il éprouve aux deux côtés intérieurs de la plaque. Au-dessus et au-dessous sont deux plaques C, D impénétrables à la lumière, disposées comme on le voit par la figure; elles ne servent qu'à écarter la lumière étrangère; elles sont noircies sur la face qui regarde la plaque, et ne peuvent toucher le verre, d'après la recommandation de *Brewster*. La diminution nécessaire des rayons s'opère ici par le changement des angles d'incidence, ou par l'augmentation du nombre des réflexions, ou par l'augmentation d'épaisseur du verre, ou par l'application de verres colorés au lieu de verres blancs, ou enfin en couvrant les faces réfléchissantes d'une substance qui, dans ses rapports avec la réfraction, se rapproche ou s'éloigne du verre. Par la combinaison de ces moyens, l'on peut parvenir à éteindre la lumière au degré desiré. Le rayon *cV*, qui sort après la seconde réflexion, si l'on n'a pas pris l'angle d'incidence très-petit, se trouve entièrement polarisé; celui qui sort après trois réflexions, l'est pareillement, même avec de bien plus grands changemens de l'angle d'incidence.

Enfin, l'on doit encore signaler les recherches que *M. Arago* a faites depuis peu et qu'il a prises pour sujet d'un mémoire qu'il a lu à l'Académie de Paris, sous le titre : *Sur les moyens de résoudre la plupart des questions de photométrie que la découverte de la polarisation de la lumière a fait naître*. Il est fâcheux que nous ne connaissions de ses recherches que la notice suivante, qui est extraite de *l'Institut*, nº 13, pag. 106.

« *M. Arago* remarque, en commençant son mémoire, qu'au milieu des progrès brillans et inespérés que l'optique a faits depuis un tiers de siècle, une seule branche de cette science, celle qui traite de la mesure des intensités, celle qu'on a désignée sous le nom de *photométrie*, est restée à peu près stationnaire. Suivant lui, les moyens dont *Bouguer*, *Lambert*, *Rumford*, firent usage manquent entièrement de précision. *M. Arago* travaille depuis quelques années à remplir cette lacune de l'optique, ne fût-ce, dit-il, qu'à raison des applications multipliées dont les méthodes photométriques paraissent susceptibles.

» L'objet principal de son mémoire était aujourd'hui *la loi*

d'après laquelle un faisceau de lumière polarisée se partage entre l'image ordinaire et l'image extraordinaire, quand ce faisceau traverse un cristal doué de la double réfraction. La connaissance de cette loi, outre son importance sous le rapport théorique, conduirait très-simplement à la solution d'un grand nombre de questions astronomiques très-curieuses. *M. Arago* signale entre autres la comparaison de l'intensité lumineuse de la portion de la lune que les rayons solaires éclairent directement, avec celle de la partie du même astre qui reçoit seulement les rayons réfléchis par la terre. Il croit, d'après les expériences qu'il a déjà tentées à cet égard, qu'on pourra, avec les instrumens perfectionnés dont il espère faire bientôt usage, saisir dans la lumière cendrée les différences de l'éclat plus ou moins nuageux de l'atmosphère de notre globe. Il n'est donc pas impossible, malgré tout ce qu'un pareil résultat exciterait de surprise au premier coup d'œil, qu'un jour les météorologistes aillent puiser dans l'aspect de la lune des notions précieuses sur *l'état moyen* de diaphanéité de l'atmosphère terrestre dans les hémisphères qui successivement concourent à la production de la lumière cendrée.

» Après avoir aussi indiqué tout le parti qu'on pourra tirer de la loi de polarisation cherchée, pour perfectionner les observations si importantes des éclipses des satellites de Jupiter, *M. Arago* est passé à l'explication détaillée des méthodes dont il se propose de faire usage pour arriver expérimentalement, et dans tous les cas, à la connaissance des intensités comparatives des rayons ordinaire et extraordinaire. Ces méthodes sont entièrement nouvelles; il serait impossible d'en donner une idée suffisante sans le secours de figures et de quelques calculs analytiques; aussi nous contenterons-nous, pour aujourd'hui, de dire que les méthodes imaginées par M. *Arago*, outre l'exactitude qui leur est propre, se font remarquer par la circonstance véritablement paradoxale que la comparaison des deux images s'effectue sans que ces deux images aient besoin d'être jamais séparées.

En terminant sa lecture, M. *Arago* a fait connaître les moyens

dont il s'est servi, pour déterminer les proportions de lumière contenue dans les faisceaux réfléchis sous toutes sortes d'angles, quelle que soit la nature de la substance éprouvée; il a montré, par exemple, comment on peut trouver l'angle de polarisation sur les métaux. »

Photomètres de MM. DE HUMBOLDT, POTTER, etc.

Dans la 12e livraison de ses *Annales de physique et de chimie*, M. *Poggendorf* cite quelques autres tentatives pour parvenir à la construction d'un bon photomètre; il fait connaître en premier lieu un ingénieux emploi du sextant à réflexion que M. *De Humboldt* a imaginé pour apprécier les degrés d'intensité de la lumière des étoiles, et dont cet illustre savant a fait autrefois l'application à plusieurs étoiles du ciel austral.

Quand l'allidade du sextant est sur le point zéro du limbe, que les deux miroirs sont parallèles, et qu'on dirige l'instrument vers une étoile, on voit dans la lunette, qui est parallèle au limbe et inclinée d'environ 15° sur le petit miroir, deux images de l'étoile, l'une directe par la partie non étamée de ce petit miroir, et l'autre indirecte qui arrive à la lunette après deux réflexions successives sur le grand miroir et la partie étamée du petit miroir. La dernière est naturellement plus faible que la première, mais on a un moyen de les rendre de même intensité; la lunette, d'après la nature du sextant, n'est pas susceptible de tourner sur son axe, mais elle est munie d'une vis par laquelle elle peut toujours être éloignée ou rapprochée du limbe en lui restant parallèle. D'après ce mouvement, on conçoit que les rayons directs et réfléchis d'une même étoile, qui, pour une certaine position de la lunette, se partagent sur l'objectif de manière que les premiers passent par sa partie supérieure et les seconds par sa partie inférieure, peuvent être répartis sur l'objectif dans un rapport donné. Si l'on rapproche la lunette

du limbe, on augmente la partie de l'objectif qui reçoit les rayons réfléchis, et en conséquence l'intensité de l'image réfléchie augmente également; tandis que la partie qui reçoit les rayons directs diminue, et l'on peut arriver ainsi à un point où les intensités des deux images sont égales.

Si l'on est arrivé à cette dernière position pour une étoile, il est facile ensuite de comparer deux étoiles, il suffit en effet de diriger la lunette sur l'une d'elles et de tourner ensuite l'allidade jusqu'à ce qu'on aperçoive près de cette image directe l'image réfléchie de la seconde étoile; l'œil distingue facilement avec quelque pratique, laquelle est la plus lumineuse; et par diverses comparaisons semblables, on se trouve à même de ranger les étoiles comparées, d'après la quantité de leur lumière.

C'est d'après cette méthode que M. *De Humboldt*, dans son voyage en Amérique, a établi les appréciations suivantes (1); les étoiles de première grandeur sont de 80 à 100°; celles de seconde grandeur de 60 à 80°; celles de troisième grandeur de 45 à 60°; celles de quatrième de 30 à 45° et celles de cinquième grandeur entre 20 et 30°.

Sirius.	100°	β de la grue	76
Canopus.	98	β du grand chien.	73
α du centaure.	96	α du lièvre.	71
Achernar	94	α du toucan	70
β du centaure.	93	β du lièvre.	70
Fomahault	92	α de la colombe.	68
Rigel.	90	β »	67
Procyon	88	γ du grand chien.	66
Beteigeuze	86	α du phénix	65
ε du grand chien.	83	γ de la grue	58
δ »	81	ζ du grand chien	51
α de la grue	81	α de l'indien	50
α du paon	78	β du grand chien	47

En comparant des étoiles qui sont à de grandes distances, on

(1) *Voyage*, etc., édition in-8°, t. IV, p. 32 et 287.

reçoit naturellement les rayons de celles qu'on voit par réflexion sous des angles divers d'inclinaison sur le miroir. Cette différence d'incidence peut être d'une grande influence quand la réflexion s'opère par des miroirs de verre transparent ; mais elle tire peu à conséquence quand elle a lieu sur des verres étamés ou sur des miroirs métalliques (1).

On trouve aussi dans les *Annales* de Berlin la description du photomètre de M. *Potter*, mais comme elle n'est point accompagnée d'une figure qui la rende plus facile à concevoir, nous préférons présenter ici la description que M. *Potter* lui-même a bien voulu nous communiquer.

Cet instrument de photométrie par comparaison présente plusieurs avantages, mais il ne peut être mis en expérience que pendant le jour, en plein air, et avec un ciel favorable, c'est-à-dire uniformément couvert de manière que la lumière arrive également des différens côtés vers une tablette qui est la partie essentielle de l'instrument, fig. 6, pl. I. C'est une pièce de bois unie d'environ 16 pouces en longueur sur 12 pouces en largeur, sur cette pièce de bois est fixée, à angle droit, une bande d'environ 23 3/4 pouces de longueur sur 3 3/8 pouces de largeur. Le bord de cette bande est fixé le long d'un demi-cercle comme le représente la figure. Au centre de l'arc circulaire est un axe *a* sur lequel tournent les deux bras *ab* et *ac*, à chacun de ces bras est attaché un morceau de *crown glass* dont les faces ont été polies et dont la partie postérieure a été couverte ensuite d'un vernis noir de cire à cacheter pour y détruire la réflexion. Ces morceaux de verre sont fixés de manière qu'en tournant autour du pivot, ils restent toujours perpendiculaires au plan du bois, et réfléchissent toujours vers l'œil placé en *d*, par exemple, les images de certaines parties de la surface de la

(1) D'après des appréciations de M. *Potter*, l'intensité de la lumière après la réflexion sur des miroirs métalliques varie si peu avec l'angle d'incidence, qu'on peut la regarder à peu près comme invariable. (Note de M. *Poggendorf*).



bande. Si cette surface est également éclairée dans toute son étendue, la vivacité de la réflexion dans les verres ne dépendra que de leur inclinaison par rapport aux rayons visuels. Quand le verre réfléchit vers l'œil, la lumière de la partie de la tablette directement opposée ou du point *e*, la réflexion sera très-forte et elle sera la plus faible quand l'nicidence est à peu près perpendiculaire, ou quand les verres font voir à l'œil la partie voisine de *f*. Quand on a une position fixe pour l'œil ou un tube à travers lequel on voit les verres, on détermine aisément l'angle sous lequel la lumière qui entre dans l'œil est incidente sur le verre, au moyen d'un cercle gradué autour du point *a*, et qui montre l'inclinaison des bras sur la direction de la lumière.

L'instrument qui vient d'être décrit, muni de deux morceaux de *crown'glass* fixés aux bras *ab* et *ac*, est tel qu'il a été employé par M. *Potter* pour déterminer l'intensité de la lumière dans les anneaux de *Newton* par transmission. Quand on veut comparer une autre substance polie au *crown glass*, elle doit occuper la place de l'un des morceaux de verre, et être attachée avec soin au bras qui doit la faire tourner autour du pivot.

M. *Poggendorf* parle encore d'autres photomètres et particulièrement d'un dont la description lui a été communiquée par un anonyme; la lumière y est éteinte dans son passage au travers de petits vases remplis d'un liquide coloré. Pour rendre l'absorption plus ou moins forte, 25 petits vases sont numérotés d'après les proportions dans lesquelles un liquide fortement absorbant est mêlé à de l'eau pure. Nous devons nous borner à indiquer le principe d'après lequel ce photomètre est construit; il participe, comme on voit, au défaut de tous les photomètres par absorption, ce qui n'empêche pas ces instrumens d'être utiles dans bien des circonstances.

Sur l'absorption de la lumière par les milieux colorés, considérée sous le rapport de la théorie ondulatoire, par sir JOHN F.-W. HERSCHEL (1).

L'absorption de la lumière par des milieux colorés, est une branche de l'optique physique qui n'a été étudiée que depuis une époque récente avec ce degré d'attention que réclame son importance. Les recherches de *Newton* sur les couleurs des corps naturels, quoiqu'ingénieuses et élégantes, ne peuvent guères, dans l'état actuel de nos connaissances, être regardées autrement que comme une généralisation prématurée; et elles ont eu l'effet naturel de pareilles généralisations, quand elles sont spécieuses en elles-mêmes et appuyées par une autorité qui pour le temps n'admet point d'appel, c'est-à-dire, qu'elles répriment la curiosité en paraissant rendre toute recherche ultérieure superflue et en tournant l'attention vers des terrains improductifs. J'ai montré, je crois d'une manière satisfaisante, dans mon *Essai sur la lumière* que l'application de l'analogie des couleurs des lames minces à celles des corps naturels est limitée à une classe comparativement resserrée, tandis que les phénomènes de l'absorption, auxquels je pense qu'on peut rapporter la grande majorité des couleurs naturelles, m'ont toujours paru constituer une branche de photologie *sui generis*, qui doit être étudiée en elle-même par la voie de recherches inductives et dans les rapports constans avec les faits tels que la nature les présente.

Le caractère le plus remarquable dans cette classe de faits, consiste dans l'inégale absorbabilité des différens rayons du prisme et l'absence totale de quelque chose de semblable à la régularité qu'on observe en passant progressivement d'une extrémité du spectre à l'autre. En considérant le sujet sous ce rapport, toute idée de gradation régulière fonctionnelle dispa-

(1) Ce mémoire a été lu à la réunion de l'association britannique à Cambridge, et inséré dans le *Philosophical Magazine* pour décembre 1833.



raît; nous semblons perdre de vue la grande loi de continuité, et nous nous trouvons engagés au milieu de relations illusoires et capricieuses en apparence, tout-à-fait différentes de ce qu'on observe dans les autres branches de l'optique. C'est peut-être pour ce motif surtout que les phénomènes de l'absorption, dans quelques travaux récens et sous le point de vue où M. *Whewell* s'est placé dans son rapport sur les progrès et l'état actuel de cette branche de la philosophie naturelle, ont été présentés comme très-difficiles à se concilier avec la théorie des ondulations de la lumière. En tant que j'ai décrit précédemment les phénomènes en termes propres, il est évident qu'il s'attache une certaine difficulté à les ramener à une théorie *quelconque* qui serait même en état de les expliquer définitivement d'une manière exacte. Quand il existe manifestement une pareille complication et des discontinuités aussi brusques dans un assemblage considérable de faits, on ne peut attendre que le simple énoncé de quelques propositions générales, comme des mots cabalistiques, va tout à coup dissiper cette complication et faire que tout devienne clair et intelligible. Si nous représentons l'intensité totale de la lumière, en un point quelconque d'un spectre partiellement absorbé, par l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse indique la place du rayon dans l'ordre de réfrangibilité, il sera évident, d'après le nombre énorme de *maxima* et de *minima*, et les sauts brusques et les fréquens anéantissemens de sa valeur pour les différentes amplitudes de l'abscisse, que son équation, si toutefois on peut la ramener à une expression analytique, doit être d'une nature singulièrement complexe, et doit en tous cas renfermer un nombre considérable de constantes arbitraires dépendant des relations qui existent entre le milieu absorbant et la lumière, en même temps que des transcendantes d'un ordre élevé et compliqué. Nous ne devons pas attribuer à l'insuffisance d'une des deux théories rivales, si nous n'apercevons pas d'abord comment de pareils phénomènes peuvent se réduire à l'une ou à l'autre, mais plutôt nous devons chercher à nous assurer s'il se trouve, d'abord, quelque chose dans les phénomènes con-

sidérés en général qui répugne soit aux principes de la dynamique, soit aux notions que ces théories admettent respectivement comme faits fondamentaux.

Maintenant, pour ce qui regarde seulement le fait général de l'obstruction et de l'extinction définitive de la lumière dans son passage à travers des milieux épais, si nous comparons la théorie corpusculaire et la théorie des ondulations, nous trouverons que la première s'appuie sur notre ignorance et la dernière sur notre connaissance pour l'explication des phénomènes d'absorption. En cherchant à expliquer l'extinction de la lumière, par la doctrine corpusculaire, nous devons considérer la lumière qui est éteinte ainsi comme un corps matériel, non susceptible de s'anéantir. Elle peut néanmoins subir une transformation; et l'on peut rechercher si la lumière qui est devenue inactive, a passé dans des agens impondérables tels que la chaleur, l'électricité, etc. Le pouvoir échauffant des rayons solaires, donne au premier abord une consistance plausible à l'idée de la transformation de la lumière en chaleur par l'absorption. Mais quand on vient à examiner la matière de plus près, on la trouve partout hérissée de difficultés. Comment se fait-il, par exemple, que les rayons les plus éclairans ne sont pas les plus calorifiques, mais qu'au contraire l'énergie calorifique accompagne, dans sa plus grande intensité, les rayons qui possèdent comparativement de faibles pouvoirs éclairans? Ces questions et d'autres de semblable nature pourront peut-être recevoir leurs solutions par la suite; mais pour le moment on ne saurait y répondre. Ce n'est donc pas sans motif que la question « que devient la lumière? » qui paraît avoir été agitée par les photologistes du siècle dernier, a été regardée comme étant d'une haute importance et d'une grande difficulté, par les philosophes de la doctrine corpusculaire.

D'une autre part, la réponse à cette question, dans la théorie des ondulations, est simple et claire. La question « que devient la lumière? » dépend de cette autre plus générale, « que devient le mouvement? » et la réponse, dans les principes de la dynamique, est qu'il continue toujours. Aucun mouvement

n'est anéanti, rigoureusement parlant; mais il peut se partager, et les parties peuvent se trouver opposées et, *dans le fait*, se détruire mutuellement. Un corps frappé, quoique parfaitement élastique, vibre pendant un temps et paraît rentrer ensuite dans son repos primitif. Mais ce repos apparent (même en faisant abstraction de la partie de mouvement qui peut être enlevée par l'air ambiant), n'est autre chose qu'un état de mouvemens partagés et mutuellement détruits, dans lequel chaque molécule continue à être agitée par une multitude indéfinie d'ondes réfléchies à l'intérieur, et propagées dans toutes les directions possibles, à partir de chaque point de la surface où elles vont frapper successivement. La superposition de pareilles ondes, on peut le concevoir facilement, opère à la fin leur destruction mutuelle qui sera d'autant plus complète que la figure du corps est plus irrégulière et le nombre des réflexions internes plus grand.

Dans le cas d'un corps parfaitement élastique et d'une figure parfaitement régulière, la réflexion interne d'une onde, une fois propagée à l'intérieur dans une certaine direction particulière, peut se continuer à l'infini sans produire de destruction mutuelle; et dans les corps sonores d'un nature éminemment élastique, nous voyons dans le fait que le mouvement se continue très-long-temps. Mais le moindre manque d'*élasticité parfaite*, change notre conception d'une masse en vibration, en une multitude de systèmes inharmoniques communiquant entre eux. A chaque transport d'une ondulation d'un tel système au système voisin, un écho partiel est produit. L'unité de l'onde qui se propage est rompue de cette manière, et une partie de cette onde se disperse dans l'intérieur du corps sous forme d'ondulations distinctes partant, comme d'un centre de divergence, de chacun des systèmes dont nous avons parlé plus haut. Après avoir passé et repassé ainsi un nombre de fois plus ou moins grand à travers le corps (quelque parfaites que l'on puisse supposer les réflexions à sa surface), l'onde primitive se trouve divisée en une foule d'autres, d'une grandeur insensible, qui, par leur mouvement continuel dans le corps,

finissent par se détruire mutuellement; pendant que chacune des ondes secondaires ainsi produites éprouve à son tour les mêmes alternatives de rupture et de dégradation.

En parlant ici de la destruction du mouvement, j'ai supposé à dessein que le corps mis en vibration ne communique avec aucun autre. Un corps d'une élasticité parfaite ou très-grande, étant frappé dans l'air, vibre assez long-temps pour donner naissance à des frémissemens sonores qui se communiquent à l'air; mais si son élasticité est nulle ou très-foible, le mouvement interne décrit plus haut, s'exécute avec une telle rapidité que les impulsions produites sont en trop petit nombre et s'évanouissent trop rapidement pour passer de la surface du corps aux couches d'air adjacentes.

Dans mon *Essai sur le son*, je suis parti de ce principe de réflexion interne et de subdivision non interrompue dans un milieu consistant en une terre légère entre-mêlée de beaucoup d'air, pour expliquer les bruits sourds que l'on attribue souvent à la reverbération de cavités souterraines, et en particulier ceux de la solfatare de *Pouzzole*, qui ont acquis une grande célébrité. On peut assez bien comparer les bruits sourds et mal définis ainsi produits par la succession d'échos partiels, à la lumière nébuleuse qui éclaire un milieu laiteux, lorsqu'on y introduit un rayon lumineux intense. Si maintenant l'on suppose une masse semblable de particules matérielles, isolée de toute communication avec l'air extérieur par quelqu'enveloppe sonore, les échos partiels, en frappant la surface dans une certaine direction, sont renvoyés de nouveau dans l'intérieur: d'où naissent de nouveaux mouvemens, de sorte qu'à la fin, il devient impossible d'assigner un point dans l'intérieur de la masse qui ne soit pas agité, dans un seul et même instant, par des ondulations qui la traversent dans tous les sens imaginables. Or l'état d'une molécule, sous l'influence d'un nombre infini d'impulsions contraires ainsi superposées, est identique avec l'état de repos.

Maintenant, la seule difficulté qui se rencontre encore dans l'application de la théorie ondulatoire aux phénomènes d'ab-

sorption, c'est de concevoir comment un milieu, c'est-à-dire une combinaison de molécules éthérées et de molécules palpables (1), peut être constitué de manière à devenir transparent, ou librement perméable à un rayon ou système d'ondulations, et opaque ou difficilement perméable à un autre système qui ne diffère que peu du premier quant au nombre des ondulations. Nous aurons atteint le but que nous nous proposions dans cet article, si nous pouvons indiquer des modes d'agrégation et des combinaisons dans lesquels l'air, au lieu de l'éther, est le milieu ondulatoire, et qui, ou bien seront incapables de transmettre un son musical d'une nature donnée, ou le transmettront bien moins vite que les sons d'une autre nature, quoique peu différente de celle du premier. Or, tout ce dont l'expérience ou une théorie basée sur des fondemens assez solides pour commander la conviction, nous démontre la possibilité dans le cas des sons musicaux, doit, comme on ne saurait le nier, avoir son analogue parmi les phénomènes des couleurs, lorsqu'on les rapporte aux vibrations de l'éther. Un exemple d'une combinaison acoustique ou d'un système composé vibratoire, incapable de transmettre un son musical donné, nous est fourni par le tuyau AE, qui, après avoir formé seul une certaine longueur AB, se divise au point B en deux tuyaux B*c* et *bc*, *fig.* 7, semblables et disposés d'une manière symétrique, qui se réunissent de nouveau en D*d*, et constituent à partir de là un seul tuyau DE, dont la direction coupera en deux (de même que AB) l'angle formé par les deux branches. Ces branches, au reste, sont d'inégale longueur, l'une ABCD surpassant l'autre d'une quantité égale à la moitié de la longueur de l'ondulation de la note musicale en question. Il est évident alors que, si cette note résonne au point A, cha-

(1) Par molécules palpables ou corps palpables, j'entends les molécules pondérables qui constituent le monde matériel solide, liquide ou gazeux, par opposition aux molécules éthérées qui se rapportent à l'éther auquel sont dus les phénomènes lumineux.

que ondulation se subdivisera en Bb en deux parties qui parcourront les deux branches avec des intensités égales, jusqu'à ce qu'elles se réunissent en Dd. En arrivant à ce point, elles seront tournées dans des sens opposés et devront par conséquent se détruire, ainsi que dans chaque point de leur course subséquente, à travers le tuyau DE; de sorte qu'en appliquant l'oreille au point E, on ne percevrait aucun son, ou bien celui qu'on pourrait entendre serait extrêmement faible et devrait être attribué à une légère inégalité dans les intensités avec lesquelles les ondulations arrivent par les tuyaux : cette inégalité disparaîtrait en augmentant un tant soit peu l'aire de la section du plus grand des deux tuyaux (1).

Supposons maintenant, qu'au lieu d'être cylindrique, ce tuyau fût carré, et que la surface entière d'un côté d'une chambre fût occupée par les orifices A de tuyaux semblables, de sorte qu'il n'y eût que les intervalles nécessaires pour donner place à leurs rapports et à leurs soudivisions, selon la condition énoncée plus haut; concevons en second lieu, que les autres points E de réunion des tuyaux fussent placés d'une manière analogue dans une autre chambre, à une distance considérable de la première et séparée de celle-ci par de la maçonnerie ou des matériaux d'une nature quelconque remplissant tous les intervalles entre les tuyaux, de façon à être totalement impénétrables au son. Les choses étant disposées de cette manière, que l'on fasse résonner tous les tons de la gamme, ou bien que l'on exécute de la musique quelconque

(1) Je crois devoir faire observer que je n'ai pas fait l'expérience décrite dans le texte : je ne sache pas même qu'elle ait jamais été faite; mais il est aisé de voir qu'elle ne pourrait manquer de réussir et qu'elle éclaircirait complétement le principe des interférences. Au lieu d'un tuyau rempli d'air, on pourrait se servir d'un canal d'eau : à l'une des ses extrémités, on exciterait par quelque moyen mécanique, des ondes d'une certaine largeur qui ne se propageraient pas au delà du point de réunion D, des deux canaux dans lesquels on aurait divisé le canal principal AB.



dans la première chambre, alors chaque note sera transmise, excepté celle que les tuyaux ne peuvent conduire.

La gamme ainsi transmise aura une note de moins, et cette note, d'après le langage adopté par les photologistes, aura été *absorbée* dans son passage. En disposant ainsi différentes chambres qui communiqueraient par des tuyaux incapables (*untuned*) de transmettre certaines notes, toutes ces notes manqueraient à la gamme lorqu'elle arriverait dans la dernière chambre; imitant ainsi un spectre dont différens rayons ont été absorbés en passant à travers un milieu coloré.

Dans mon *Essai sur la lumière*, art. 505, j'ai suggéré, comme origine possible des lignes fixes dans le spectre solaire, de même que des espaces obscurs ou moins éclairés dans les spectres de différentes flammes, que l'impuissance dans les particules d'un milieu absorbant de permettre le passage d'un rayon coloré particulier à *travers* leur substance, peut constituer un obstacle *in limine*, à la production de ce rayon par elles. L'expérience suivante, facile à répéter, va développer ma pensée. prenez deux diapasons de même grandeur, chauffez leurs extrémités et attachez avec de la cire à cacheter un disque de carton sur une extrémité de l'un de ces diapasons et deux sur les extrémités de l'autre; ces disques, de même grandeur, doi-doivent être attachés sur les faces *intérieures*, ayant leurs plans perpendiculaires à la section qui passerait par les axes des deux branches du diapason. Les disques sur le diapason qui en porte deux, doivent avoir leurs surfaces séparées d'environ un dixième de pouce et leurs centres exactement opposés. L'autre diapason doit être mis à l'unisson, en chargeant sa branche non couverte d'un disque avec un poids de cire équivalent au poids de la cire et du disque de l'autre branche. Frappez alors les diapasons et vous entendrez une différence remarquable dans l'intensité des sons. Le diapason avec un disque fera entendre un son clair et fort, tandis que l'autre sera sourd, étouffé et à peine perceptible, à moins d'être tenu près de l'oreille. Le motif de cette différence est que les branches opposées du diapason sont toujours dans des états opposés

de mouvement, et cela par suite de ce que l'air est agité, ou par les deux branches vibrant librement, ou par toutes deux chargées de disques égaux, avec des impulsions approximativement égales et opposées; au lieu que, dans le cas d'un diapason ayant seulement un disque, une plus grande action sur le milieu ambiant est laissée à la branche qui le porte, et une partie plus grande de mouvement non décomposé se propage dans l'air. Nous avons donc ici le cas d'un système vibrant en pleine activité, rendu, par une conformation particulière, incapable de propager ses ondulations avec effet dans le milieu environnant; tandis qu'une masse exactement pareille de matière, *vibrant avec la même intensité*, mais disposée plus favorablement quant à ses parties, fonctionne sous des circonstances moins défavorables.

Le diapason à disques est un instrument fort instructif, et je ne l'abandonnerai pas sans m'être servi de ses propriétés pour montrer la facile propagation de ses vibrations, d'une étendue définie, à travers un système comparativement plus ou moins bien disposé à transmettre ceux de tout autre étendue. Prenez deux ou un plus grand nombre de diapasons à l'unisson, et munissez chacun d'eux d'un seul disque de la forme d'un grand pain à cacheter placé extérieurement (*voyez* fig. 17, art. 186 de mon *Essai sur le son*, pour la manière d'attacher un pareil disque). Après avoir frappé l'un d'eux, amenez son disque près du disque d'un autre diapason, de manière que les centres soient opposés, et il mettra immédiatement l'autre en vibration, comme on en jugera évidemment soit par le son produit quand on aura arrêté le premier diapason; soit par ses tremblemens sensibles à la main qui le tient. La communication du mouvement est plus puissante et plus complète quand une petite spirale de fil d'argent est fixée à l'un des diapasons et amenée en contact avec l'autre diapason par son côté en spirale ou convexe. Imaginons maintenant une série de pareils diapasons avec leurs spirales, arrangés comme dans la *fig.* 8, et supposons que le premier A soit maintenu en vibration par une cause excitante, comme, par exemple, en fai-

sant résonner une note musicale auprès de son disque A, à l'unisson avec celle qui résulterait de sa grandeur. Les vibrations excitées de cette manière se propageront évidemment dans la ligne entière, mais avec une intensité décroissante, jusqu'au dernier diapason. L'on remarquera l'analogie de ce phénomène avec celui que nous présente un rayon d'une couleur définie qui se transmet facilement à travers un milieu absorbant, mais s'éteint peu à peu après en avoir traversé une grande épaisseur. Pour éviter le contact des systèmes vibrans, nous pouvons les concevoir formés (fig. 9), non plus par des diapasons, mais par des lames droites, terminées par des disques et soutenues en leurs nœuds.

Lorsque l'on met en contact deux diapasons à disques, qui ne sont pas entièrement à l'unisson, les vibrations de l'un se communiquent toujours à l'autre, même lorsqu'elles diffèrent assez pour produire des battemens perceptibles et très-rapides. Mais la communication est moins complète dans ce cas, et le son que l'on entend est plus foible que dans le cas de l'unisson parfait, et décroît avec une vitesse d'autant plus grande que les diapasons s'éloignent davantage de l'état d'unisson. Ce fait est analogue à l'apparence d'une ligne brillante dans le spectre au milieu d'espaces obscurs, et il est assez facile d'imaginer des combinaisons de la nature de celles dont nous avons parlé plus haut, qui transmettront différentes notes, et ne pourront en transmettre d'autres intermédiaires, parce que ces dernières ne seront à l'unisson parfait ou approximatif avec aucune de celles que peuvent faire résonner les systèmes établis : de là nous pouvons, par analogie, nous rendre compte de la production de lignes brillantes et de lignes noires dans un spectre inégalement absorbé.

Le cas que nous venons de considérer, est entièrement analogue, quant à son principe, à celui d'un phénomène qui se trouve décrit dans mon *Essai sur le son* (1), et que, lors de la

(1) *Encyclopédie métropolitaine*, 2e div., vol. II, p. 790.

publication de cet essai, je croyais avoir été le premier et le seul à observer : mais, d'après ce que j'ai appris récemment, je me fais un véritable plaisir de rendre l'honneur de cette expérience aussi frappante que simple, à M. *Wheatstone*, connu par une foule d'expériences ingénieuses et instructives sur l'acoustique. Si l'on fait vibrer un diapason au-dessus de l'ouverture d'un tuyau qui rende la même note, le tuyau *parlera* par résonnance (si le diapason est à disque, et que l'ouverture du tuyau soit presque entièrement recouverte par le disque, le ton qui en sort est d'une clarté et d'une netteté tout-à-fait remarquable). De plus, nous avons observé, M. *Wheatstone* et moi, que si l'on prend deux *diapasons* qui ne soient pas parfaitement à l'unisson, et qu'on les fasse vibrer *à la fois* au-dessus de l'orifice, le tuyau rendra au même instant les deux notes, et produira ensuite des sons forts qui ne seront plus à l'unisson avec celui qu'il produisait primitivement. Au reste, selon que la hauteur de l'un ou l'autre diapason diffère de celle à laquelle correspond la longueur du tuyau et qui est unique pour celui-ci, la résonnance du ton perçu est plus ou moins faible et devient imperceptible au delà d'une certaine limite.

Ces phénomènes et ceux qui s'y rapportent dépendent du principe dynamique des *vibrations forcées*, tel qu'il est énoncé dans l'*Essai sur le son* cité plus haut, ou d'une manière plus générale dans une publication plus récente (CAB. CYCLOP., *Traité d'Astronomie*.) « Si une partie d'un système, assem- » blée par des liens matériels ou par les attractions mutuel- » les de ses membres, est maintenue continuellement par » une cause inhérente à la constitution du système ou étran- » gère à ce système, dans un état de mouvement périodique » régulier ; ce mouvement se propagera à travers le système » entier, et donnera naissance, dans chacun de ses mem- » bres, et dans les particules de chaque membre, à des mou- » vemens périodiques qui s'exécuteront dans la même période » de temps que celui auquel elles doivent leur origine, quoi- » que leurs *maxima* et *minima* ne doivent pas nécessairement » se correspondre. » La démonstration générale de ce prin-

cipe, comme théorème de dynamique, est donnée dans l'*Essai* précité *sur le son*, et la possibilité de l'appliquer à la transmission de la lumière à travers les corps matériels, est indiquée dans une note qui s'y trouve jointe.

Pour concevoir, d'après ce principe, le mode dont la lumière se transmet à travers les milieux palpables, et expliquer les phénomènes d'absorption qu'on remarque dans ce passage, il faut regarder ces milieux comme composés d'une multitude innombrable de parcelles ou de molécules vibrantes, dont chacune, avec la partie d'éther luminifère qu'elle renferme (et avec lequel elle est unie sans doute d'une manière plus intime que par une simple juxta-position), constitue un système vibrant distinct, dans lequel des parties douées d'une élasticité différente, sont intimement liées entre elles et subissent l'influence de leurs mouvemens mutuels. L'acoustique nous offre divers exemples de systèmes semblables : nous pourrions citer les membranes étendues sur des lames rigides, les cavités remplies par des substances fibreuses ou pulvérulentes, le mélange de gaz, les systèmes composés de lames élastiques, comme les planches, les lames de verre, les roseaux, les diapasons, etc., chaque partie ayant un son propre et toutes étant jointes par un lien commun. Chacun de ces systèmes sera maintenu dans un état de vibration forcé, tant que la cause agissante exerce son action; mais les différens corps qui le constituent prendront, sous l'empire de cette action, des amplitudes d'oscillation plus ou moins grandes, selon que le son qu'ils rendent isolément, se rapprochera plus ou moins de celui qui répond au nombre des vibrations du système entier dans un temps donné. Quelquefois, en émettant un son de voix, l'on fait trembler une planche dans un parquet de chambre; mais si ce phénomène ne se présente pas pour un autre son, l'on peut très-bien concevoir que la planche n'en remplit pas moins ses fonctions dynamiques consistant à transmettre au sol, ou à disperser à travers sa propre substance ou celle des corps contigus, le mouvement que l'oscillation de l'air lui communique sans cesse.

Comme nous ne connaissons rien de la forme actuelle et

de la nature intime des molécules palpables des corps matériels, il nous est permis de les concevoir dans un seul et même milieu, tels que l'explication des phénomènes puisse aisément en résulter. Il n'est pas nécessaire de supposer que les molécules luminifères des corps palpables sont identiques avec leurs derniers atomes chimiques. J'inclinerais plutôt à les considérer comme de petits groupes composés chacun d'innombrables atomes de ce genre; et il peut se faire que, dans les milieux non cristallisés, les axes ou lignes de symétrie de ces groupes, au lieu d'avoir une direction déterminée, puissent être dirigés dans tous les sens imaginables, ou que les groupes eux-mêmes ne soient pas symétriques. Une pareille disposition de choses correspondrait à une loi uniforme d'absorption, indépendante de la direction des rayons transmis; tandis que, dans les milieux cristallisés, une uniformité de constitution et de position de ces groupes élémentaires, ou plutôt des cellules et des autres combinaisons qu'on peut supposer qu'ils forment avec l'éther interposé, peut aisément être regardée comme formant avec lui des différences dans le mode de vibration, et même dans la disposition de leurs lignes et surfaces nodales, selon les différentes directions dans lesquelles les ondes peuvent les traverser; on pourrait aussi déduire de là une explication du changement de teinte de pareils milieux d'après la direction des rayons à l'intérieur, ainsi que de la différence de teinte et d'intensité de leurs pinceaux polarisés d'une manière opposée : j'aurai, du reste, bientôt occasion de parler de la dernière classe de phénomènes.

Mais n'ayant en vue actuellement que de donner, comme un objet d'examen, l'indication d'une explication possible des phénomènes de l'absorption dans la théorie des ondulations, je ne pousserai pas plus loin son application et je n'essaierai pas des développemens ultérieurs de lois particulières de structure propre à tel ou tel genre de phénomènes; je veux cependant mentionner un ou deux faits d'acoustique qui me paraissent très-propres à expliquer des phénomènes correspondans dans la propagation de la lumière. Le premier est l'em-

pêchement de propagation du son dans un mélange de gaz différant beaucoup en élasticité relativement à leurs densités. Les expériences de Sir *J. Leslie* sur la transmission du son à travers des mélanges d'hydrogène avec de l'air atmosphérique, établissent suffisamment cet effet remarquable. Il serait à désirer que l'on continuât les expériences sur une échelle plus grande; mais je ne sache pas jusqu'à présent que quelqu'un les ait jamais répétées. Il serait intéressant, par exemple, de rechercher si l'empêchement présenté par un semblable mélange de gaz est le même pour tous les degrés d'élévation d'une note musicale, et jusqu'à quel point ce phénomène peut être imité en mêlant de la poussière dont les particules ont une forme semblable, telle que la poussière de lycoperdon, etc., ou des vapeurs aqueuses, et jusqu'à quel point un pareil mélange affecterait des sons inégaux de différente élévation.

L'autre fait dans la science de l'acoustique que je ferai remarquer comme éclairant des phénomènes correspondans de photologie, a été observé par M. *Wheatstone*, qui a bien voulu m'autoriser à le mentionner. En essayant de propager des vibrations dans des fils, des verges, etc., à de grandes distances, il fut conduit à remarquer une très-grande différence à l'égard de la facilité de propagation entre les vibrations longitudinales et transverses à la direction générale de propagation. Les premières étaient aisément transmises à toute distance sans diminution sensible d'intensité; les autres étaient si promptement interceptées par l'air, qu'elles étaient incapables d'être transmises même à de médiocres distances avec une intensité un peu remarquable. Ceci me frappa comme étant analogue à la facile transmission d'un rayon polarisé dans une certaine direction à travers une tourmaline ou un autre cristal absorbant, doué de la double réfraction, tandis que le rayon inversement polarisé (dont les vibrations sont perpendiculaires à celles du premier) est rapidement absorbé et étouffé, c'est-à-dire, dispersé par l'intermédiaire de la matière colorante qui remplace l'air de l'expérience de M. *Wheatstone*, et se neutralise lui-même, comme il a été dit plus haut, par l'opposition de ses parties sous-divisées.

Sur l'hyperboloïde à une nappe, et le paraboloïde hyperbolique. Note communiquée par M. Chasles, ancien élève de l'école polytechnique.

Théorème. — *Tous les hyperboloïdes à une nappe qu'on peut faire passer par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, ont leurs centres situés sur la droite qui joint les points milieux des deux diagonales du quadrilatère.*

Soit ABCD le quadrilatère, *fig*. 10.

Les plans des angles B et D sont tangens à chacun des hyperboloïdes; ces deux plans se coupent suivant la diagonale AC. Le plan mené par cette diagonale et par le point milieu F de la corde BD qui joint les deux points de contact est, comme on sait, un plan diamétral de la surface, c'est le plan diamétral conjugué à la corde BD. Ainsi ce plan passe par le centre de la surface. Par une raison semblable, le plan mené par la diagonale BD et par le milieu F de la diagonale AC passe aussi par le centre de la surface; la droite d'intersection de ces deux plans, laquelle est la droite FE, passe donc par le centre de la surface. Ainsi le théorème est démontré.

Parmi tous les hyperboloïdes qu'on peut faire passer par les quatre côtés du quadrilatère, il en est un qui est un paraboloïde, son centre est à l'infini; l'axe du paraboloïde sera donc parallèle à la droite EF. Ainsi :

Théorème. — *Quand on fait passer un paraboloïde par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, son axe est parallèle à la droite qui joint les points milieux des deux diagonales du quadrilatère.*

Le premier théorème donne la solution de ce problème:

Problème. — *Étant données trois droites par lesquelles doit passer un hyperboloïde à une nappe, déterminer le centre de cet hyperboloïde.*

On cherchera deux génératrices quelconques de cet hyperboloïde, ce seront deux droites qui s'appuieront sur les trois directrices données.

Ces deux droites formeront avec les deux premières directrices un quadrilatère gauche; on mènera ses diagonales, on prendra leurs points milieux, et on joindra ces points par une droite L.

Les deux mêmes génératrices formeront un deuxième quadrilatère avec la première et la troisième directrice; on cherchera pareillement la droite L′ qui joindra les milieux des deux diagonales de ce quadrilatère.

Les deux droites L, L′ se rencontreront en un point qui sera le centre de l'hyperboloïde.

M. Hachette a donné une autre solution très-simple de ce problème, par la considération du parallélipipède construit sur les trois directrices de l'hyperboloïde. Le centre de ce parallélipipède, dont on obtient immédiatement deux sommets opposés, ce qui suffit pour déterminer ce centre, est précisément le centre de l'hyperboloïde.

Problème. — *Étant donné un quadrilatère gauche, par les côtés duquel doit passer un paraboloïde hyperbolique, on demande de déterminer la direction de l'axe, et le sommet du paraboloïde.*

Soit ABCD le quadrilatère.

Nous avons vu par le théorème ci-dessus, que l'axe du paraboloïde sera parallèle à la droite EF qui joint les milieux des deux diagonales du quadrilatère; ainsi la première partie du problème est résolue.

On pourrait encore mener par le sommet A du quadrilatère une droite parallèle au côté DC; cette droite et le côté AB, déterminent le plan *directeur* auquel sont parallèles toutes les génératrices qui s'appuient sur les deux côtés AD, BC.

Pareillement une parallèle au côté BC, menée par le point A, détermine avec le côté AD le deuxième plan *directeur* auquel sont parallèles les génératrices qui s'appuient sur les deux côtés opposés AB, DC.

La droite d'intersection de ces deux plans *directeurs* est, comme on sait, parallèle à l'axe du paraboloïde.

Pour déterminer le sommet du paraboloïde, je remarque que le plan tangent en ce point est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. Ce plan tangent contient les deux génératrices qui se croisent au sommet. Donc, si par un point quelconque de l'espace on mène un plan P perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, c'est-à-dire, à la droite EF, il coupera les deux plans *directeurs* que nous venons de déterminer, suivant deux droites qui seront parallèles aux deux génératrices qui se croisent au sommet du paraboloïde.

Pour déterminer la position de ces deux génératrices, on mènera par le côté AD un plan parallèle à la droite d'intersection du plan P et du premier plan directeur (parallèle aux deux côtés AB, CD); ce plan coupera le côté opposé BC en un point; la droite menée par ce point, parallèlement à l'intersection du plan P et du premier plan directeur, sera l'une des deux génératrices cherchées.

Pareillement on mènera, par le côté AB, un plan parallèle à l'intersection du plan P et du deuxième plan directeur (celui qui est parallèle aux côtés AD, BC); ce plan coupera le côté CD en un point par lequel on mènera une droite parallèle à cette même intersection. Cette droite sera la deuxième génératrice.

Le point d'intersection de ces deux génératrices sera le sommet du paraboloïde. Ainsi le problème est résolu (1).

Si le plan P que nous avons mené perpendiculairement à la droite d'intersection des deux plans directeurs, était un plan

(1) M. *Hachette* a donné une autre construction du sommet d'un paraboloïde; elle est fondée sur cette propriété curieuse du paraboloïde, savoir que l'on peut toujours placer sur le paraboloïde un losange gauche, et on n'en peut placer qu'un, dont un des côtés soit dirigé suivant une génératrice donnée; les deux droites qui joignent les milieux opposés du losange, sont les génératrices qui se croisent au sommet du paraboloïde. (*Voyez* le *Bulletin de la société philomatique*, de mars 1832, pag. 37.)

donné quelconque, les deux génératrices que nous avons construites, résoudraient ce problème : « Mener à un paraboloïde » qui doit passer par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, » un plan tangent parallèle à un plan donné, et déterminer » le point de contact. »

Quand les deux côtés opposés AB, DC du quadrilatère gauche par lequel doit passer un paraboloïde sont perpendiculaires au côté AD, la construction du sommet du paraboloïde se simplifie singulièrement, il suffit de mener la droite qui mesure la plus courte distance des deux côtés AD, BC; *le point où cette droite s'appuie sur le côté* AD *est le sommet du paraboloïde.*

En effet, toutes les génératrices du paraboloïde qui s'appuient sur les deux côtés AD,BC sont perpendiculaires au côté AD, parce que le plan *directeur*, parallèle aux deux côtés AB, DC, est perpendiculaire à AD; donc la droite Δ qui me-mesure la plus courte distance de AD et BC est une *génératrice* du paraboloïde.

Toutes les génératrices qui s'appuient sur les deux côtés AB, DC s'appuient sur cette plus courte distance Δ ; mais elles seront parallèles au plan directeur parallèle aux deux côtés AD, BC, lequel est perpendiculaire à la plus courte distance Δ ; toutes ces génératrices sont donc perpendiculaires à cette droite Δ.

Soit S le point de rencontre du côté AD et de la droite Δ ; concevons les deux plans menés par ce point parallèlement aux deux plans directeurs ; l'un passera par la droite Δ et sera perpendiculaire à la droite AD, l'autre passera par la droite AD et sera perpendiculaire à la droite Δ; l'intersection de ces deux plans sera donc perpendiculaire au plan des deux droites AD et Δ. Or, l'intersection de ces deux plans est parallèle à l'axe du paraboloïde, et le plan des deux droites AD, Δ est tangent au paraboloïde ; donc ce plan tangent est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, ce qui prouve que le point de contact S est le sommet du paraboloïde.

Cette construction du sommet du paraboloïde rectangle, donne une solution très-simple du problème suivant :

Problème. — *Déterminer le sommet du paraboloïde formé par les normales à une surface réglée, menées par les points d'une génératrice de cette surface.*

Par trois points de la génératrice donnée, on mènera les normales à la surface; puis, on mènera une droite qui s'appuie sur ces trois normales, et on cherchera la droite Δ qui mesure la plus courte distance entre cette droite et la génératrice de la surface. Cette droite Δ s'appuiera sur la génératrice en un point qui sera le sommet du paraboloïde normal à la surface réglée suivant la génératrice donnée.

Les hyperboloïdes qu'on peut faire passer par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, jouissent de plusieurs propriétés dont le théorème que nous avons démontré au commencement de cette note, et qui nous suffisait pour notre but, n'est qu'un cas particulier; ces diverses propriétés seront des conséquences du théorème suivant :

Théorème. — *Tous les hyberboloïdes qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, présentent un système de surfaces du second degré qui ont, deux à deux, la même ligne d'intersection; et présentent aussi un système de surfaces du second degré, inscrites dans une même surface développable.*

Il suffit de prouver que deux hyperboloïdes qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, ne peuvent avoir aucun autre point commun, ni aucun plan tangent commun autre que les plans des quatre angles du quadrilatère.

Et en effet, si par un point de l'espace on pouvait mener deux hyperboloïdes qui passassent par les quatre côtés du quadrilatère, tout plan mené par ce point les couperait suivant deux coniques qui auraient cinq points communs, c'est-à-dire qui se confondraient; ce qui prouve qu'il ne peut y avoir qu'un hyperboloïde passant par un point donné de l'espace. Ainsi l'intersection complète de deux hyperboloïdes qui passent par les quatre côtés du quadrilatère, se compose de ces quatre côtés; ce qui démontre la première partie du théorème.

Maintenant supposons que deux hyperboloïdes passant par les quatre côtés d'un quadrilatère, aient un plan tangent commun; et

regardons un point quelconque de ce plan comme le sommet d'un cône circonscrit aux deux hyperboloïdes ; les plans menés par ce point et les quatre côtés du quadrilatère seront quatre plans tangens communs aux deux hyperboloïdes ; ces deux surfaces auraient donc cinq plans tangens communs ; ce qui prouve que les deux cônes circonscrits se confondent ; d'où l'on conclut que les deux hyperboloïdes se confondent aussi. Il est donc prouvé que les seuls plans tangens communs à deux hyperboloïdes sont les plans des quatre angles du quadrilatère, et qu'ainsi la surface développable complète circonscrite à deux hyperboloïdes se compose de ces quatre plans ; ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

Ainsi les hyperboloïdes qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, jouissent en même temps des propriétés d'un système de surfaces du second degré qui passent par la même courbe d'intersection, et de celles d'un système de surfaces du second degré inscrites dans une même développable.

En vertu de la première partie du théorème, nous dirons que :

Si on circonscrit aux hyperboloïdes, des cônes qui aient pour sommet commun un point donné de l'espace, les plans de leurs courbes de contact passeront par une même droite.

Ou, en d'autres termes :

Les plans polaires d'un même point passent par une même droite.

Et en vertu de la deuxième partie du théorème, nous dirons que :

Les cônes circonscrits aux hyperboloïdes, suivant des courbes comprises dans un même plan, ont leurs sommets sur une même droite.

Ou, en d'autres termes :

Les pôles d'un même plan, pris par rapport aux divers hyperboloïdes, sont sur une même droite.

Remarquons que si on considère les hyperboloïdes comme ayant une intersection commune, les plans de deux angles opposés du quadrilatère devront être regardés comme repré-

sentant un de ces hyperboloïdes; parce que leur ensemble forme une surface du second degré passant par les quatre côtés du quadrilatère; il en est de même des plans des deux autres angles opposés du quadrilatère.

Si on considère les hyperboloïdes comme surfaces ayant quatre plans tangens communs, qui sont les plans des quatre angles du quadrilatère, on devra mettre au nombre de ces surfaces les deux diagonales du quadrilatère, qu'on regardera comme des surfaces qui ont deux axes nuls et qui se réduisent à des droites terminées aux sommets du quadrilatère.

La diagonale AC, par exemple, satisfait à la condition d'être tangente aux deux plans BAD, BCD qui passent par ses extrémités, qui représentent les sommets de la surface qui se réduit à cette diagonale.

Voilà pourquoi la droite, lieu des centres des hyperboloïdes, passe par les milieux des deux diagonales. Pareillement, la droite, lieu des pôles d'un même plan, par rapport aux hyperboloïdes, passera par les deux points des deux diagonales qui seront les conjugués harmoniques de ceux où elles perceront le plan, par rapport à leurs extrémités respectivement.

Sur les enfans trouvés.

Les discussions parlementaires qui viennent d'avoir lieu, ont fait connaître sur les enfans trouvés différens renseignemens statistiques, que nous avons cru utile de reproduire ici, en y ajoutant quelques détails que nous extrayons des *Recherches sur la population* (1), et du *Rapport sur les institutions de bienfaisance*, publié, pour 1827, par le Gouvernement précédent.

Comme les nombres du tableau suivant comprennent les enfans trouvés d'Amsterdam, nous avons fait connaître les nombres moyens relatifs à cette ville; les autres ne concernent que la Belgique.

---

(1) Par *A. Quetelet*, in-8o. Bruxelles, chez Tarlier, 1827.

ANNÉES.	POPULATION au 1er janvier.	ENTRÉS.	SORTIS PAR DÉCÈS.	Réclamés	Par l'âge, etc.	POPULATION moyenne.	ENFANS pour 1 DÉCÈS.
1815 . . .	10739	2918	1597	235	649	10953	6,88
1816 . . .	11176	3075	1459	262	701	11497	7,88
1817 . . .	11829	3943	1793	271	895	12315	6,87
1818 . . .	12813	3241	1290	549	2967	13026	10,10
1819 . . .	13248	3148	1346	583	1023	13342	9,91
1820 . . .	13444	3001	1200	749	1194	13366	11,14
1821 . . .	13302	2636	1200	584	1317	13065	10,89
1822 . . .	12837	2688	1160	467	1305	12700	10,95
Moyenne. .	12424	3082	1381	463	1006	12533	9,03
Amsterdam .	3855	713	356	236	268	3782	10,62

Mouvement annuel de la population des enfans trouvés et abandonnés, pendant une série de 11 ans, de 1822 à 1832.

PROVINCES.	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	1829	1830	1831	1832
Anvers.	2625	2673	2588	2278	2253	2278	2186	2046	1828	1784	1651
Brabant	2318	2247	2137	2176	2189	2556	2354	2413	2402	2300	2300
Flandre occidentale .	»	554	529	513	493	502	502	530	513	490	179
Flandre orientale . .	917	893	848	818	749	722	746	751	775	318	318
Hainaut	»	1632	1632	1672	1730	1886	1966	1911	1844	1949	2080
Liége	»	»	241	209	210	210	211	229	222	181	197
Namur	1013	1051	982	925	877	769	715	725	669	868	868
Limbourg (1)	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	102
Luxembourg (1). . . .	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	17
TOTAUX. . . .	6873	9050	8957	8591	8501	8923	8680	8605	8253	7890	7712

(1) On n'a pu donner que la moyenne, les indications spéciales pour chaque année manquent à défaut d'archives.

PROVINCES.	1827. REVENUS DES		1827. COLLECTES ET SUBSIDES.		1832. ÉVALUATION APPROXIMATIVE DES REVENUS DES		1832. FRAIS D'ENTRETIEN des ENFANS trouvés.	DONS ET LEGS faits aux établissemens de BIENFAISANCE en 1830, 1831, 1832 et 1833.
	Administratns des secours à domicile.	HOSPICES.	Administratns des secours à domicile.	HOSPICES.	Administratns des secours à à domicile.	HOSPICES.		
Anvers	161,254	192,650	101,433	101,846	336,124	322,114	78,227	160,477
Brabant	396,527	365,864	10,511	152,792	320,056	425,472	190,476	57,227
Flandre occidentale .	232,346	227,200	192,235	25,059	599,416	295,923	19,000	487,985
Flandre orientale . .	264,917	225,089	119,726	75,911	473,383	315,053	59,664	376,236
Hainaut	323,947	202,212	15,426	80,010	369,995	266,476	149,903	257,040
Liége	130,640	145,005	13,386	11,518	176,581	188,465	14,458	94,068
Limbourg	159,691	100,417	10,739	1,580	169,162	64,623	10,095	29,761
Luxembourg	7,754	21,580	11,484	124	12,193	9,614	1,058	37,599
Namur	44,282	74,370	4,010	13,458	51,224	71,186	64,277	60,776
TOTAL. . .	fl. 1,721,358	fl. 1,554,387	fl. 478,950	fl. 462,298	fl. 2,508,084	fl. 1,958,926	fr. 587,158	fr. 1,561,169

Réflexions sur l'erreur échappée à Newton, *en composant sa première formule pour déterminer la loi de la résistance nécessaire afin qu'un corps pesant décrive librement une courbe donnée*, par M. Plana, directeur de l'observatoire de Turin.

1. *Lagrange* a discuté cette question dans sa *Théorie des fonctions analytiques;* mais il m'a paru qu'on pouvait encore désirer quelques éclaircissemens, soit pour faire mieux sentir à quoi tient la source de cette erreur, soit pour faire présumer les motifs qui ont pu déterminer *Newton* à chercher une autre solution tout-à-fait différente de la première. D'ailleurs il y a lieu de faire, même sur sa seconde solution, quelques remarques nouvelles qui ne me paraissent pas sans intérêt pour l'histoire de ce problème.

2. Avant de discuter la formule de *Newton*, publiée dans la 1re édition des *Principes*, je vais exposer comment, par les méthodes modernes, on peut établir la proportion qui lui a servi de fondement pour la trouver, et faire voir en quoi consiste l'altération qu'il a fait subir à son résultat intermédiaire pour le rendre fautif.

Soit R l'expression de la résistance, censée équivalente à une force accélératrice active, dirigée suivant la tangente à la trajectoire dans un sens contraire au mouvement du projectile. Les coordonnées étant x, y; si l'on nomme s la longueur de l'arc de la courbe décrite depuis le commencement du mouvement; les composantes de la force R respectivement parallèles aux axes des x et des y seront, $R\frac{dx}{ds}$, $R\frac{dy}{ds}$. Donc, en nommant M la masse du projectile, et g la force accélératrice de la gravité, on aura, en posant $r=\frac{R}{M}$;

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-r\frac{dx}{ds};$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - r\frac{dy}{ds}$$

pour les équations différentielles du mouvement de son centre de gravité. Maintenant, si l'on observe que le second coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient égal à

$$\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

lorsqu'on regarde x et y comme fonctions du temps, on établira aussitôt l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{dx}{dt}\left(g + r\frac{dy}{ds}\right) + r\frac{dy}{dt}.\frac{dx}{ds}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

qui se réduit à

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -g.$$

En différentiant cette équation par rapport à t et divisant par $\frac{dx}{dt}$, on obtient

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

De là on tire, à l'aide des équations (1) et (3),

$$(4) \quad \ldots \quad \frac{r}{g} = \frac{-y'''}{2\frac{dx}{ds}(y'')^2} = \frac{-y'''\sqrt{1+y'^2}}{2(y''^2)},$$

en observant que, pour plus de simplicité, nous faisons

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{etc.}$$

Si l'on nomme v la vitesse du mobile, on a d'abord

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = (1 + y'^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

et à cause de l'équation (3);

$$(5) \ldots \ldots \quad v^2 = \frac{g(1 + y'^2)}{-y''}.$$

L'équation (4) revient donc à dire que

$$(6) \ldots \ldots \quad r = \frac{y''' v^2}{2y''\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Ainsi, en supposant la résistance proportionnelle au produit du carré de la vitesse par la densité du milieu; c'est-à-dire $r = n\Delta . v^2$, on aura l'équation

$$(7) \ldots \ldots \quad n\Delta = \frac{y'''}{2y''\sqrt{1 + y'^2}},$$

pour déterminer la loi de la densité, propre à faire décrire au mobile la courbe donnée.

3. Comme l'équation (3) subsiste, même en supposant variable la force accélératrice représentée par g, il est clair que la différentiation de cette équation donnerait alors;

$$(8) \ldots \quad \frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1 + y'^2}}{2(y'')^2} + \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2g . y''}\frac{dg}{dx},$$

ou bien

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{2r}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{d.\left(\frac{g}{y''}\right)}{dx}.$$

Pour déterminer le temps t, en fonction de x, il faudra employer la formule

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g(1+y'^2)}{-y''}},$$

qui donne

$$t = \int dx \sqrt{\frac{-y''}{g}}.$$

S'il y avait, en outre, une force accélératrice variable X, parallèle à l'axe des x, les équations différentielles du mouvement seraient;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - r\frac{dx}{ds}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - r\frac{dy}{ds}.$$

De là, on tirerait par le même procédé;

$$(3)' \quad \ldots \quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -g - X\frac{dy}{dx};$$

$$(5)' \quad \ldots\ldots \quad v^2 = \frac{(1+y'^2)(g+Xy')}{-y''};$$

et

$$t = \int dx \sqrt{\frac{-y''}{g+Xy'}}.$$

En différentiant l'équation $(3)'$ par rapport à t, on trouvera;

$$(8)' \quad \ldots \quad \frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2(y'')^2} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2gy''}.\frac{dg}{dx}$$

$$+\frac{X}{g}\left(\frac{3}{2} - \frac{y'y'''}{2(y'')^2}\right)\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'\sqrt{1+y'^2}}{2gy''}.\frac{dX}{dx},$$

ou bien

$$(9)' \dots \quad \frac{2r}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{d.\left(\frac{g - Xy'}{y'}\right)}{dx} + 4X.$$

En désignant par a le rayon de courbure de la courbe donnée, on a

$$y'' = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{a};$$

d'où l'on tire

$$a^2 y''' = \frac{3y'(1+y'^2)}{a} + (1+y'^2)\frac{da}{dx}:$$

par conséquent on peut (en revenant au cas primitif) mettre les équations (4) et (5), sous cette forme :

$$(4)' \dots \quad \frac{r}{g} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{da}{2dx(1+y'^2)};$$

$$(5)'' \dots \quad v^2 = \frac{ga}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

On voit par ces dernières équations que, si la courbe donnée est un cercle vertical, il faudra une force tangentielle, proportionnelle au *sinus* de l'angle que la tangente au cercle fait avec le diamètre horizontal, pris pour l'axe des x. Il est d'ailleurs clair que le mouvement doit être oscillatoire, puisque la vitesse devient nulle aux deux extrémités de ce diamètre. Pour calculer ce mouvement, on fera

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \cos.\varphi:$$

alors on a,

$$v = -a\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{ag.}\sqrt{\cos.\varphi};$$

d'où l'on tire, en posant

$$\sin.\theta = \sqrt{2.}\ \sin.\tfrac{1}{2}\varphi;$$

$$t = -\sqrt{\frac{2a}{g}}.\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\theta}}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $\theta = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\theta = o$, pour avoir le temps de la demi-oscillation. Si l'on préfère donner à ce résultat une signification géométrique, on dira que

$$t = \frac{2.S}{\sqrt{ga}};$$

S étant un arc de lemniscate représentée par les équations

$$x = a\cos.\theta\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\theta};\ y = \frac{a}{2\sqrt{2}}\cdot\sin.2\theta.$$

4. L'équation (4) peut être exprimée géométriquement à l'aide des considérations suivantes. En multipliant par h^4 le numérateur et le dénominateur de la valeur de $\frac{r}{g}$ fournie par cette équation, on peut l'écrire ainsi;

$$\frac{r}{g} = -\frac{h^3y'''}{2}.\ \frac{h\sqrt{1+y'^2}}{4\left(y''\frac{h^2}{2}\right)^2}.$$

Or, en nommant Y', Y'', Y''', trois ordonnées consécutives

correspondantes aux abscisses $x-h'$, $x-h$, $x+h$, on a

$$Y' = y - y'h' + y''\frac{h'^2}{2} - y'''\frac{h'^3}{2.3} + y^{IV}\frac{h'^4}{2.3.4} - \text{etc.};$$

$$Y'' = y - y'h + y''\frac{h^2}{2} - y'''\frac{h^3}{2.3} + y^{IV}\frac{h^4}{2.3.4} - \text{etc.};$$

$$Y''' = y + y'h + y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2.3} + y^{IV}\frac{h^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Par conséquent, si l'on nomme F', F'', F''' les flèches, ou parties de ces ordonnées prolongées, comprises entre la courbe et la tangente menée par le point dont les coordonnées sont x, y; on aura

(11) . . . $$F' = y''\frac{h'^2}{2} - y'''\frac{h'^3}{2.3} + \text{etc.};$$

(12) . . . $$F'' = y''\frac{h^2}{2} - y'''\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.};$$

(13) . . . $$F''' = y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on prend pour h' une quantité telle qu'on ait

(14). . . . . . $$h' = h + \frac{h^2}{2}.\frac{y'''}{y''},$$

il viendra, en négligeant les termes multipliés par h^4;

(15) . . . . . $$F' = y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{3};$$

et par conséquent

(16) . . . . . $$F'' - F' = -y'''\frac{h^3}{2}.$$

Donc, en faisant

$$(17) \ldots\ldots \quad \alpha = h\sqrt{1+y'^2}$$

il est clair que l'équation (4) revient à dire que

$$\frac{r}{g} = \frac{\alpha(F'' - F')}{4\left(y''\frac{h^2}{2}\right)^2}.$$

Si l'on observe maintenant que les trois séries qui déterminent F', F'', F''', ont le même premier terme, on en conclura qu'on peut remplacer le dénominateur

$$4\left(y''\frac{h^2}{2}\right)^2$$

par une quelconque des quatre quantités

$$4F'^2,\ 4F''^2,\ 4F'''^2,\ 4F''F''' :$$

de sorte qu'on a

$$(18).\quad \frac{r}{g} = \frac{\alpha(F'' - F')}{4F'^2} = \frac{\alpha(F'' - F')}{4F''^2} = \frac{\alpha(F'' - F')}{4F'''^2} = \frac{\alpha(F'' - F')}{4F''F'''}.$$

Mais il est essentiel d'observer qu'on ne pourrait pas faire $F' = F'''$ dans le numérateur de ces formules, parce que la différence $F'' - F'$ n'est pas égale à la différence $F'' - F'''$. En effet, les équations (12), (13), (16) donnent

$$(19) \ldots \quad F'' - F''' = -\frac{h^3y'''}{3} = \frac{2}{3}(F'' - F').$$

Ainsi, on peut changer F' en F''' dans le *numérateur* des

formules (18), sans les multiplier en même temps par la fraction $\frac{2}{3}$.

(5) Pour mieux connaître la signification de la quantité h' fournie par l'équation (14), je supposerai qu'on ait explicitement la valeur de x en fonction du temps t; et que, après avoir posé $x = \varphi(t)$, on ait

$$x + h = \varphi(t + \theta) = x + \frac{dx}{dt}\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.}$$

D'après cette équation, il est clair qu'on a aussi les suivantes, en retenant seulement les deux premiers termes des séries infinies, savoir :

$$h = \frac{dx}{dt}\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\theta^2;$$

$$h^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\theta^2 + \frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}\theta^3;$$

$$h' = \frac{dx}{dt}\theta + \frac{\theta^2}{2}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y'''}{y''}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right];$$

$$F' = \frac{y''}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\theta^2 + \theta^3\left[\frac{y''}{2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y'''}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right];$$

$$F'' = \frac{y''}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\theta^2 + \theta^3\left[\frac{y''}{2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{y'''}{6}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right];$$

$$F''' = \frac{y''}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\theta^2 + \theta^3\left[\frac{y''}{2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y'''}{6}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right].$$

En éliminant de ces équations les valeurs de

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2}$$

à l'aide des équations (1) et (3), il viendra

$$h = \quad v\frac{dx}{ds}\theta - r\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\theta^2}{2};$$

$$h' = \quad v\frac{dx}{ds}\theta - \frac{\theta^2}{2}\left[r\frac{dx}{ds} + \frac{gy'''}{(y'')^2}\right];$$

$$F' = -g\frac{\theta^2}{2} + \theta^3\left[\frac{gr}{2v} - \frac{gy'''}{3y''}\sqrt{\frac{g}{-y''}}\right];$$

$$F'' = -g\frac{\theta^2}{2} + \theta^3\left[\frac{gr}{2v} + \frac{gy'''}{6y''}\sqrt{\frac{g}{-y''}}\right].$$

$$F''' = -g\frac{\theta^2}{2} + \theta^3\left[\frac{gr}{2v} - \frac{gy'''}{6y''}\sqrt{\frac{g}{-y''}}\right].$$

L'équation (4) donne

$$-y''' = \frac{2r}{g}(y'')^2\frac{dx}{ds} = \frac{2r(y'')^2}{gv}\sqrt{\frac{g}{-y''}}:$$

donc, en substituant cette valeur, on aura

$$(\text{A})\ldots\left\{\begin{array}{l} h\dfrac{ds}{dx} = h\sqrt{1+y'^2} = \alpha = v\theta - r\dfrac{\theta^2}{2}; \\ h'\dfrac{ds}{dx} = h'\sqrt{1+y'^2} = v\theta + r\dfrac{\theta^2}{2}; \\ F' = -g\dfrac{\theta^2}{2} - \dfrac{gr\theta^3}{6v};\ F'' = -g\dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{5}{6}\dfrac{gr\theta^3}{v}; \\ F''' = -g\dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{gr\theta^3}{6v}. \end{array}\right.$$

On voit par là que la valeur de la flèche F′ dérive de celle de la flèche F‴, en changeant le signe de θ dans cette dernière.

Par conséquent, on a

$$x = \varphi(t); \quad x + h = \varphi(t + \theta); \quad x - h' = \varphi(t - \theta).$$

En désignant par $t - \theta'$ la valeur du temps qui répond à l'abscisse $x - h$, nous avons

$$x - h = \varphi(t - \theta') = x - \theta' \frac{dx}{dt} + \frac{\theta'^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2} + \text{etc.};$$

ce qui fournit l'équation

$$-\frac{dx}{dt}\theta - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\theta^2}{2} = -\theta'\frac{dx}{dt} + \frac{\theta'^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2},$$

de laquelle on tire,

$$\theta' = \theta - \frac{r\theta^2}{v}.$$

De sorte que

$$x - h = \varphi\left(t - \theta + \frac{r\theta^2}{v}\right).$$

Au reste j'ajouterai ici que, en général, on a, dans tout mouvement curviligne, les deux formules

$$(20).\ F''' = y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{6} + \text{etc.},$$

$$(21).\ F''' = \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{\theta^3}{6}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dx}.\frac{d^3x}{dt^3}\right) + \text{etc.}$$

pour exprimer la flèche, ou en fonction de l'accroissement h de l'abscisse, ou en fonction de l'accroissement θ du temps.

(6) Après avoir ainsi déterminé le temps qui répond aux trois abscisses $x - h'$, $x - h$, $x + h$, je remarque que, si

l'on fait

$$\beta = \theta v; \quad \rho = r\frac{\theta^2}{2},$$

les équations (A) donnent

$$h\frac{ds}{dx} = \beta - \rho; \; h'\frac{ds}{dx} = \beta + \rho,$$

et que par conséquent on a

$$(22) \ldots \frac{\beta + \rho}{\beta - \rho} = \frac{h'}{h} = \frac{1 + \frac{r\theta}{2v}}{1 - \frac{r\theta}{2v}} = 1 + \frac{r\theta}{v}.$$

Mais les mêmes équations (A) donnent aussi

$$\frac{F'}{F''} = \frac{1 + \frac{r\theta}{3v}}{1 - \frac{5}{3}\frac{r\theta}{v}} = 1 + 2.\frac{r\theta}{v};$$

partant, on a

$$(23). \quad . \frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F''}} = \sqrt{1 + \frac{2r\theta}{v}} = 1 + \frac{r\theta}{v}.$$

Ainsi il est clair, par le rapprochement des équations (22) et (23), que

$$(24). \ldots \ldots \frac{\beta + \rho}{\beta - \rho} = \frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F''}}$$

Cette équation est précisément celle qui servait de fondement à la solution publiée par *Newton* dans la première édition de ses *Principes*. Car, après avoir fait

$$\rho = \frac{r\theta^2}{2}, \quad \gamma = \frac{g\theta^2}{2},$$

et

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{(\beta + \rho) - (\beta - \rho)}{2\gamma},$$

il établissait, par son raisonnement, la proportion

$$\beta + \rho : \beta - \rho :: \sqrt{F'} : \sqrt{F''},$$

de laquelle il tirait l'équation

$$\frac{(\beta + \rho) - (\beta - \rho)}{\beta - \rho} = \frac{\sqrt{F'} - \sqrt{F''}}{\sqrt{F''}} = \frac{F' - F''}{F'' + \sqrt{F'}.\sqrt{F''}},$$

qui change la valeur précédente de $\frac{r}{g}$, en celle-ci :

$$\frac{r}{g} = \frac{(\beta - \rho)[F' - F'']}{2\gamma[F'' + \sqrt{F'}.\sqrt{F''}]}.$$

Mais la dernière des équations (A) donne

$$\gamma = - F''' + \frac{gr\theta^3}{6\nu};$$

ainsi nous avons

$$\frac{r}{g} = \frac{(\beta - \rho)(F'' - F')}{\left(2F''' - \frac{gr\theta^3}{6\nu}\right)(F'' + \sqrt{F'}.\sqrt{F''})}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction étant des quantités de l'ordre de la quatrième puissance des incrémens, on doit supprimer toutes les quantités d'un ordre supérieur pour avoir le véritable rapport de r à g. D'après cette considération, il est permis de faire, *dans le dénominateur*

$$\sqrt{F'}.\sqrt{F''} = F' = F''',$$

et d'y supprimer le terme

$$-\frac{gr\theta^3}{6v}:$$

alors, en observant que $\beta-\rho=\alpha$, on change l'équation précédente en celle-ci :

$$(N). \quad \ldots\ldots \quad \frac{r}{g}=\frac{\alpha(F''-F')}{4(F''')^2}.$$

Le raisonnement de *Newton* le conduisait à cette équation, qui est exacte, puisqu'elle s'accorde avec les équations (18) trouvées plus haut. Mais *Newton* a rendu son résultat fautif en changeant F′ en F‴ dans le numérateur de sa formule, sans faire attention, que la différence F″—F‴ n'est pas égale à la différence F″—F′, comme on le voit par notre équation (19). La véritable source de l'erreur commise par *Newton*, consiste donc dans le changement de F′ en F‴, fait dans le numérateur de sa formule primitive.

Conformément à sa figure, nous avons

$$F'=fg;\ F''=Kl;\ F'''=FG;\ \alpha=CF$$
$$\rho=FH=fh;\ \beta=lH.$$

Ainsi, *Newton* se trompait au moment, où il appliquait à sa différence $Kl-fg$ l'idée qu'il exprimait en disant : « *Et* » *simili argumento est* fg *ut quadratum temporis*, *adeoque ob* » *aequalia tempora aequatur ipsi* FG. » En écrivant ceci, *Newton* ne songeait pas au second terme des trois formules

$$F'=-\frac{g\theta^2}{2}-\frac{gr\theta^3}{6v};\ F''=-\frac{g\theta^2}{2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{gr\theta^3}{v};\ F'''-\frac{g\theta^2}{2}+\frac{gr\theta^3}{6v}.$$

Mais *Lagrange*, pour rendre avec précision la construction de *Newton*, dans les pages 399 et 400 de sa *Théorie des fonc-*

tions analytiques, devait, ce me semble, employer la petite ligne $\beta = \theta\nu$, au lieu de la petite ligne

$$\alpha = \theta\nu - \frac{r\theta^2}{2}:$$

car, sans cela, on substitue tacitement à l'équation exacte

$$\frac{\beta + \rho}{\beta - \rho} = \frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F''}}$$

de *Newton*, l'équation fautive,

$$\frac{\alpha + \rho}{\alpha - \rho} = \frac{\nu\theta}{\nu\theta - \frac{r\theta^2}{2}} = 1 + \frac{r\theta}{2\nu} = \frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F''}}.$$

(*Voy.* la 1re édition des *Principes*, ou la page du tome Ier des *OEuvres de Jean Bernouilli.*)

7. *Newton*, contraint par les argumens de *Jean Bernouilli*, de reconnaître sa méprise, aura probablement remarqué qu'il y a deux autres flèches, dont la différence est précisément égale à $F'' - F'$, et que ces flèches correspendent aux deux abscisses $x + h$, $x + 2h$. Car, en changeant x en $x + h$ dans l'expression de l'ordonnée Y''', on a

$$(25) \ldots \quad F^{\text{IV}} = \frac{h^2}{2}\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3Y'''}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$= y''\frac{h^2}{2} + \frac{2}{3}h^3y''' + \text{etc.},$$

pour la flèche F^{IV} consécutive à la flèche F'''; et par conséquent

$$(26) \ldots \quad F''' - F^{\text{IV}} = -\frac{h^2y'''}{2} = F'' - F'.$$

Mais, cette égalité n'étant point du tout une suite nécessaire

de son raisonnement, *Newton* aura tourné ses recherches vers la considération de ce qui se passe sur les deux tangentes consécutives ; et, sans songer à la manière de rectifier sa première solution (ce qui lui offrait un problème plus difficile que celui qu'il s'était d'abord proposé), il aura abandonné l'idée de considérer le mouvement sur une seule tangente prolongée de part et d'autre du point de contact ; non parce qu'il la jugeait erronée, mais à cause qu'il en tirait uniquement une transformation peu favorable de la question primitive.

8. Comme la solution du même problème, publiée dans la seconde édition des *Principes* de *Newton*, y est exposée d'une manière qui peut paraître difficile à quelques lecteurs, je vais la reproduire ici avec plus de clarté. Soit

$$\Delta s = \frac{ds}{dt}\,\theta + \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.},$$

l'espace parcouru par le mobile dans le temps très-petit θ consécutif à t; il est évident que l'on a

$$\frac{\Delta s}{\theta} = \frac{ds}{dt} + \frac{\theta}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2} + \text{etc.}, = \mathrm{F}(t) + \frac{\theta}{2}\,\mathrm{F}_{,}(t) + \text{etc.}$$

En nommant $\Delta' s$ l'arc consécutif à Δs qui répond aux deux instans $t+\theta$, $t+\theta+\theta'$, on a

$$\frac{\Delta' s}{\theta'} = \mathrm{F}(t+\theta) + \frac{\theta'}{2}\,\mathrm{F}_{,}(t+\theta) + \text{etc.}$$
$$= \frac{ds}{dt} + \theta\,\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\theta'}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2} + \text{etc.}$$

Il suit de là, que

$$\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'} = -\frac{\theta}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{\theta'}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Mais, la quantité θ' diffère de θ d'une quantité multipliée par θ^2 : donc on peut faire

$$\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'} = -\theta \frac{d^2 s}{dt^2},$$

lorsqu'on néglige le carré de θ dans le second membre de cette équation.

D'un autre côté, nous avons

$$\Delta s - h\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt}\theta + \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{ds}{dx}\left(\theta\frac{dx}{dt} + \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2 x}{dt^2}\right);$$

c'est-à-dire

$$\Delta s - h\frac{ds}{dx} = \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{ds}{dx}\frac{d^2 x}{dt^2}.\frac{\theta^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{2\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{\theta} = \theta\left(\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{ds}{dx}.\frac{d^2 x}{dt^2}\right).$$

Donc, en ajoutant cette quantité à la valeur précédente de

$$\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'},$$

il viendra

$$\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'} + 2\frac{\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{\theta} = -\theta\frac{ds}{dx}.\frac{d^2 x}{dt^2} = r\theta;$$

et par conséquent,

$$(\mathrm{N}') \quad . \quad . \frac{r}{g} = \frac{\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'} + 2\frac{\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{\theta}}{g\theta}.$$

Telle est la formule qui sert de fondement à cette solution de *Newton*. Il y parvient, en regardant la différence

$$\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'},$$

comme le décrément de la vitesse qui a lieu pendant le temps très-petit θ'. Ce décrément étant, dit-il, l'effet simultané de la résistance et de la gravité, il faudra lui ajouter la vitesse

$$\frac{2\left(\Delta s - h\dfrac{ds}{dx}\right)}{\theta},$$

due à la gravité, pour avoir la vitesse qui serait produite par la seule résistance. Ce raisonnement est juste; mais la manière dont nous venons d'établir l'équation (N'), paraîtra probablement plus claire.

9. Cela posé, voici à peu près comment *Newton* évaluait le second membre de l'équation (N'). D'abord, il prenait

$$2\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right) = h^2\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{h^2y'y''}{\sqrt{1+y'^2}};$$

ensuite, il divisait le premier membre de cette équation par θ et le second par

$$\sqrt{\frac{-2F'''}{g}};$$

ce qui revient à prendre pour θ la valeur que donne l'équation

$$F''' = -g\frac{\theta^2}{2} + \frac{gr\theta^3}{6\nu},$$

après avoir supprimé le terme multiplié par θ^3. Par ce moyen, il obtenait

$$\frac{2\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{\theta} = \frac{\sqrt{g}.\ h^2 y' y''}{\sqrt{-2F'''}.\ \sqrt{1+y'^2}};$$

et en divisant ce résultat par $g\theta$, il avait

$$\frac{2\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{g\theta^2} = \frac{h^2 y' y''}{-2F'''\sqrt{1+y'^2}}.$$

Maintenant, si l'on fait ici $2F''' = h^2 y''$ (ce qui revient à négliger les termes multipliés par h^3 dans le second membre de l'équation (13)), on aura

$$(N'').\quad \ldots \quad \frac{2\left(\Delta s - h\frac{ds}{dx}\right)}{g\theta^2} = \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Pour former la valeur des deux quantités

$$\frac{\Delta s}{\theta},\quad \frac{\Delta' s}{\theta'},$$

Newton opérait *à peu près* ainsi qu'il suit.

Il prenait d'abord,

$$\Delta s = h\frac{ds}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2 s}{dx^2} = h\sqrt{1+y'^2} + \frac{h^2}{2}\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}};$$

$$\Delta' s = \Delta s + \frac{d.\Delta s}{dx} = h\frac{ds}{dx} + \frac{3}{2}h^2\frac{d^2 s}{dx^2},$$

$$\Delta' s = h\sqrt{1+y'^2} + \frac{3}{2}h^2.\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}};$$

et, de là, il tirait ces deux équations :

$$\frac{\Delta s}{g\theta^2}=\frac{h\sqrt{1+y'^2}+\frac{h^2}{2}\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{-2F'''};$$

$$\frac{\Delta' s}{g\theta\theta'}=\frac{h\sqrt{1+y'^2}+\frac{3h^2}{2}\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\sqrt{-2F'''}.\sqrt{-2F^{IV}}}.$$

Mais, nous avons vu plus haut que

$$F'''=\frac{h^2y''}{2}+\frac{h^3}{6}y''';$$

$$F^{IV}=\frac{h^2}{2}y''+\frac{2}{3}h^3y'''=F'''\left(1+h\frac{y'''}{y''}\right);$$

partant, on a

$$\sqrt{-2F^{IV}}=\sqrt{-2F'''}\left(1+\tfrac{1}{2}h\frac{y'''}{y''}\right);$$

ce qui donne, en développant le diviseur,

$$1+\tfrac{1}{2}h\frac{y'''}{y''};$$

$$\frac{\Delta' s}{g\theta\theta'}=\frac{h\sqrt{1+y'^2}+\frac{3}{2}h^2\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{h^2}{2}\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{y''}}{-2F'''}.$$

Cela posé, il est clair que

$$\frac{\Delta s}{g\theta^2}-\frac{\Delta' s}{g\theta\theta'}=\frac{-h^2\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}+h^2\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''}}{-2F'''};$$

et, en faisant ici $2F''' = h^2y''$, on a

$$(N''') \quad . \quad . \quad \frac{\frac{\Delta s}{\theta} - \frac{\Delta' s}{\theta'}}{g\theta} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2(y'')^2}.$$

Maintenant, si l'on fait la somme des deux équations (N'') et (N'''), on obtient

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2(y'')^2};$$

c'est-à-dire l'équation (4) qu'on tire dans ces détours, des équations différentielles (1) et (2).

Si l'on observe actuellement qu'on parvient à ce résultat, en employant, comme valeurs intermédiaires de F''' et F^{IV}, les *deux* premiers termes de leur expression analytique, on aura raison d'objecter, qu'il faudrait aussi employer les deux premiers termes de la valeur de $g\theta^2$ et de $g\theta\theta'$, qui sont donnés par les équations

$$-2F''' = g\theta^2 - \frac{gr\theta^3}{6\nu}; \quad -2F^{IV} = g\theta'^2 - \frac{gr\theta'^3}{6\nu}.$$

Mais on aurait par là :

$$g\theta^2 = -h^2y'' - \frac{h^3y'''}{2} = -2F'''\left(1 + \frac{r\sqrt{-2F'''}}{3\nu\sqrt{g}}\right),$$

$$g\theta\theta' = -h^2y'' - h^3y''' = g\theta^2\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{hy'''}{y''}\right);$$

et la considération du facteur commun

$$1 + \frac{r\sqrt{-2F'''}}{3\nu\sqrt{g}}$$

deviendrait inutile dans la formation de la différence

$$\frac{\Delta s}{g\theta^2} - \frac{\Delta' s}{g\theta\theta'}:$$

ce qui fait tomber l'objection qu'on pourrait élever sur le calcul précédent.

10. La manière spéciale dont *Newton* calculait ce qu'il appelait les flèches (c'est-à-dire, pour parler avec précision, les quantités $g\theta^2$, $g\theta\theta'$), exige une explication. En considérant les quatre ordonnées consécutives Y'', y, Y^{IV}, Y^{V}, correspondantes aux abscisses $x-h$, x, $x+h$, $x+2h$, on a :

$$Y'' = y - y'h + y''\frac{h^2}{2} - y'''\frac{h^3}{2.3} + y^{\text{IV}}\frac{h^4}{2.3.4.} - \text{etc.};$$

$$y = y;$$

$$Y^{\text{IV}} = y + y'h + y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2.3} + y^{\text{IV}}\frac{h^4}{2.3.4.} + \text{etc.};$$

$$Y^{\text{V}} = y + y'.\,2h + y''\frac{4h^2}{2} + y'''.\frac{8h^3}{2.3} + y^{\text{IV}}\frac{16h^4}{2.3.4.} + \text{etc.}$$

De là on tire

$$\frac{Y'' + Y^{\text{IV}}}{2} - y = y''\frac{h^2}{2} + y^{\text{IV}}\frac{h^4}{2.3.4.} + \text{etc.};$$

$$\frac{Y^{\text{V}} + y}{2} - Y^{\text{IV}} = y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2} + \frac{7}{24}y^{\text{IV}}h^4 + \text{etc.}$$

Newton prenait

$$y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2} \text{ au lieu de } -\frac{g\theta\theta'}{2};$$

ce qui est exact, comme on le voit par le calcul direct de

$$-\frac{g\theta\theta'}{2}.$$

Mais en remplaçant de même

$$-\frac{g\theta^2}{2} \text{ par } \frac{Y'' + Y^{IV}}{2} - y = y''\frac{h^2}{2},$$

on ne tient pas compte du terme multiplié par h^3. Cependant il y a ceci de remarquable, que, en négligeant les termes multipliés par h^4, on a :

$$\frac{Y'' + Y^{IV}}{2} - y = y''\frac{h^2}{2};$$

$$\frac{Y^{V}+y}{2} - Y^{IV} = y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{2} = \left(\frac{Y'' + Y^{IV}}{2} - y\right)\left(1 + \frac{hy'''}{y''}\right);$$

où le facteur

$$1 + h\frac{y'''}{y''}$$

est précisément le même que celui que nous avons employé plus haut, pour exprimer la valeur de F^{IV} en fonction de F'''. Et comme, dans la formation de la valeur précédente de

$$\frac{\Delta' s}{g\theta\theta'},$$

il suffit de développer le facteur

$$\sqrt{1 + \frac{hy'''}{y''}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{hy'''}{y''},$$

et de prendre, *après* ce développement, le seul premier terme $y'' \frac{h^2}{2}$ de la valeur de F‴, ou de $-g\frac{\theta^2}{2}$, on voit que *Newton* pouvait faire

$$F''' = \frac{Y'' + Y^{IV}}{2} - y\,; \quad F^{IV} = \frac{Y^{V} + y}{2} - Y^{IV},$$

sans nuire à la précision du résultat définitif.

La réunion de ces réflexions démontre, ce me semble, avec le dernier degré d'évidence : 1° que l'explication de l'erreur de *Newton*, donnée par *Nicolas Bernouilli*, n'a aucun fondement réel; 2° que *Trembley*, en adoptant cette explication (*voyez* pag. 61 du vol. de l'*Académie de Berlin*, pour l'année 1798), n'avait pas bien saisi, ni l'esprit des deux solutions de *Newton*, ni l'analyse par laquelle *Lagrange* les avait mutuellement éclairées. Ce mémoire de *Trembley*, et le passage de M. *Lacroix* qu'on lit dans la page 645 du 3e vol. de son *Traité de calcul différentiel et intégral*, me paraissent propres à faire sentir que cette question est assez subtile pour faire excuser les nouveaux détails dans lesquels je viens d'entrer.

Newton savait trouver dans son génie des ressources pour surmonter souvent les obstacles sans avoir réduit la mécanique à une science qui la constitue *mécanique analytique*. Mais on sent, en méditant sur ses ouvrages, qu'il eût été impossible d'aller plus loin en marchant tout-à-fait sur ses traces. *Euler* a été forcé de traduire en analyse les solutions de *Newton* pour en tirer des méthodes plus faciles et susceptibles d'une application moins bornée. Il en a fait l'aveu lui-même en ces termes remarquables, dans la préface du 1er volume de sa mécanique. « *Mihi cum* Newtoni *principia perlustrare cœpissem usu venit, ut quamvis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum discrepantia problemata resolvere non potuerim. Illo igitur jam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex syntetica illa methodo elicere easdemque propositiones ad meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meæ augumentum accepi.* »

Malheureusement, il y a bien des cas où, même par les méthodes modernes, un changement léger en apparence entraîne à des équations intraitables. Mais on peut du moins en tirer quelque parti, soit pour examiner les cas particuliers qui admettent une solution complète, soit pour découvrir certaines propriétés qui n'exigent pas que toutes les intégrations soient exécutées. Sans trop nous écarter du sujet de ce mémoire, on peut en donner un exemple par ce problème : déterminer la courbe à double courbure décrite par un point sollicité par une force tangentielle r et une force variable g, dont la direction demeure toujours perpendiculaire à l'axe des x.

11. Dans ce cas, les composantes de la force g, parallèles à l'axe des y et des z, sont

$$\frac{gy}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \frac{gz}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

de sorte qu'on a

$$(27) \ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{ds};$$

$$(28) \ldots\ldots \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-gy}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{rdy}{ds};$$

$$(29) \ldots\ldots \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-gz}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{rdz}{ds};$$

pour les trois équations différentielles de ce mouvement. La première donne en intégrant :

$$(30) \ldots\ldots \quad \frac{dx}{dt} = Ae^{-\int\frac{rds}{v^2}},$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, et A une con-

stante arbitraire. En appliquant à ces équations la transformation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

on obtient

$$(31) \ldots \quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{-gy}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

$$(32) \ldots \quad \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{-gz}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

d'où l'on tire l'équation :

$$y\frac{d^2z}{dx^2} - z\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

qui étant intégrée, donne

$$(33) \ldots \quad y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx} = \mathrm{B};$$

B désignant une constante arbitraire. De là on tire par une nouvelle intégration

$$(34) \ldots \quad z = y\left[\mathrm{B}\int\frac{dx}{y^2} + \mathrm{C}\right] = y.q.$$

En substituant cette valeur de z dans l'équation (31), et éliminant $\frac{dx}{dt}$ à l'aide de l'équation (30), il viendra

$$(35) \ldots \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-g}{\mathrm{A}^2}\cdot\frac{e^{2\int\frac{rds}{\nu^2}}}{\sqrt{1+q^2}}.$$

En différentiant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -g(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

par rapport au temps t, on a

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d.\left[g(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{dx}.$$

Donc, en éliminant

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

à l'aide des équations (27) et (31), on aura

$$(36).\quad \frac{g(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot r\frac{dx}{ds} = \frac{d.[g(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}]}{dx}.$$

Cette équation donnerait la loi de la résistance r en supposant connue la courbe. Si l'on veut l'expression du carré de la vitesse, on prendra l'équation

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$

de laquelle on tire

$$(37)\quad v^2 = \frac{-g(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{B}{y}+q\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Maintenant, si l'on suppose la résistance r exprimée par une fonction de v, on pourra réduire l'équation (36) à une équa-

tion entre les variables y et x. Mais, son excessive complication rend cette transformation inutile en général, et, dans les cas particuliers, il vaudra mieux considérer les équations précédentes.

En supposant, par exemple,

$$r = cv \text{ et } g = c'\sqrt{y^2 + z^2},$$

c et c' étant deux constantes arbitraires, on voit que les équations (27), (28), (29) sont immédiatement intégrables.

Dans le cas général, l'équation du *plan osculateur* de la courbe est fort simple. Soit

$$Z - z = (X - x)M + (Y - y)N$$

l'équation de ce plan : on sait que

$$M = \frac{dz\, d^2y - dy\, d^2z}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} ; \; N = \frac{dx\, d^2z - dz\, d^2x}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Ainsi, dans le cas actuel, on a

$$M = \frac{B}{y}, \; N = \frac{z}{y},$$

et par conséquent

(38) . . . $Z = X.\frac{B}{y} + Y.\frac{z}{y} - B.\frac{x}{y},$

pour l'équation du plan osculateur. Il suit de là qu'en nommant θ l'inclinaison de ce plan par rapport au plan des x, y; et φ l'angle que sa trace, sur ce même plan, fait avec l'axe des x, on a

(39) . tang. θ sin. $\varphi = -\frac{B}{y}$; tang. θ cos. $\varphi = \frac{z}{y}$.

En supposant nulle la force tangentielle r, on aurait ;

$$x = At + K, \quad z = qy; \quad q = B\int\frac{dx}{y^2} + C;$$

et,

$$A^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-gy}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{-g}{\sqrt{1+q^2}};$$

où A, K, B, C, désignent quatre constantes arbitraires.

En faisant $p = \frac{dy}{dx}$, et remarquant que $dx = \frac{y^2dq}{B}$, on a

$$A^2B\,dp = -\frac{gy^2\,dq}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Lorsque la force attractive g sera donnée par une fonction de la forme $\frac{f(q)}{y^2}$, les variables seront séparées dans cette équation, et on en tirera

$$p = F(q) = \frac{B\,dy}{y^2dq}:$$

partant nous avons

$$-\frac{B}{y} = \int dq\,F(q); \quad Bx = \int y^2\,dq.$$

Après avoir ainsi résolu le problème dans le cas de $r = o$, on pourra employer la méthode de la variation des constantes arbitraires, pour résoudre celui où l'on ajoute à la force attractive g la force tangentielle r. Mais il est inutile d'en dire davantage sur une question de pure curiosité.

Turin, le 23 février 1834.

Résumé des observations météorologiques faites à Maestric[illegible] pendant l'année 1831.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle cent grade ; les hauteurs du baromètre, réduites à la température d la glace fondante, et corrigées de l'effet de la capillarité, so énoncées en lignes des Pays-Bas (millimètres). La cuvette d baromètre est placée à 52^{a}, 51 au-dessus du niveau de la me

Enfin les hauteurs des eaux de la Meuse sont observées à l'en trée de la grande écluse du bassin à Maestricht, et rapporté à la moyenne hauteur du niveau de ce bassin, laquelle e fixée à 41^{a}, 95 aunes (mètres) au-dessus du zéro de l'échell d'Amsterdam (*peil-schaal*).

TEMPÉRATURE.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS.					
	8 heures du matin.	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir.	6 heures du soir.	9 heures [du] soir.
Janvier . .	— 1°,49	— 1°,02	+ 1°,07	+ 0°,83	— 0°,35	— 1°,[illegible]
Février . .	+ 3, 12	+ 4, 16	+ 6, 71	+ 6, 29	+ 4, 79	+ 3, 8[illegible]
Mars . . .	+ 6, 28	+ 7, 48	+ 9, 71	+ 10, 59	+ 8, 23	+ 6, 71
Avril . . .	+ 9, 74	+ 11, 39	+ 14, 41	+ 14, 69	+ 12, 65	+ 10, 60
Mai	+ 13. 40	+ 15, 14	+ 16, 98	+ 21, 75	+ 15, 81	+ 12, 88
Juin. . . .	+ 15, 43	+ 16, 67	+ 19, 23	+ 19, 52	+ 17, 52	+ 14, 62
Juillet. . .	+ 17, 78	+ 19, 27	+ 22, 31	22, 82	+ 20, 91	+ 17, 76
Août . . .	+ 16, 22	+ 18, 57	+ 20, 55	+ 21, 47	+ 19, 73	+ 16, 34
Septembre.	+ 12, 44	+ 13, 77	+ 16, 67	+ 17, 12	+ 15, 64	+ 13, 35
Octobre . .	+ 12, 79	+ 14, 16	+ 16, 96	+ 17, 24	+ 15, 04	+ 13, 52
Novembre.	+ 4, 83	+ 5, 38	+ 7, 13	+ 6, 98	+ 6, 01	+ 5, 37
Décembre .	+ 4, 50	+ 4, 77	+ 5, 96	+ 5, 98	+ 5, 25	+ 4, 73
MOYENNES.	+ 9°,59	+ 10°,81	+ 13°,14	+ 13°,77	+ 11°,77	+ 9°,88

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
Janvier . . .	+ 1°,42	— 2°,04	3°,46	+ 9°7,	—13°, 9	23°,6	23, à midi.	du 29 au 30 nuit.	8°,0 le 8
Février . . .	+ 7, 26	+ 1, 81	5, 45	+ 17, 7	— 15, 0	32, 7	10, à 3 h. s.	du 31 j. au 1er f.	13, 9 » 1
Mars	+ 10, 83	+ 5, 28	5, 55	+ 18, 4	— 0, 9	19, 3	26, à 3 h. s.	du 22 » 23	15, 3 » 26
Avril	+ 15, 14	+ 7, 66	7, 48	+ 23, 2	— 0, 2	23, 4	13, à 3 h. s.	du 1 » 2	14, 8 » 7
Mai	+ 18, 31	+ 9, 51	8, 80	+ 27, 2	+ 1, 3	25, 9	23, à 3 h. s.	du 14 » 15	14, 2 » 19
Juin	+ 20, 10	+ 13, 07	7, 03	+ 28, 5	+ 9, 4	19, 1	19, à 4 h. s.	du 8 » 9	12, 2 » 15
Juillet . . .	+ 23, 00	+ 15, 83	7, 17	+ 28, 8	+ 12, 3	16, 5	8, à 3 h. s.	du 2 » 3	11, 9 » 8
Août	+ 21, 67	+ 15, 92	5, 75	+ 28, 3	+ 11, 9	16, 4	4, à 3 h. s.	du 18 » 19	10, 5 » 27
Septembre . .	+ 17, 39	+ 12, 03	5, 36	+ 21, 3	+ 5, 9	15, 4	1 à 3 h.s. et 6 à m.	du 13 » 14	10, 3 » 29
Octobre . . .	+ 17, 40	+ 12, 57	4, 83	+ 22, 2	+ 7, 2	15, 0	14, à 3 h. s.	du 30 » 31	8, 6 » 24
Novembre . .	+ 7, 45	+ 4, 70	2, 75	+ 12, 4	— 3, 3	15, 7	7, à 8 h.m.	du 27 » 28	9, 7 » 21
Décembre . .	+ 6, 33	+ 4, 09	2, 24	+ 13, 6	— 9, 6	23, 2	9, à midi.	du 30 » 31	6, 1 » 2
MOYENNES . .	+ 13°,86	+ 8°,37	5°,49	+ 20°,94	+ 0, 43	20°,51			11°,30

Maximum absolu de l'année.	+ 28°,8
Minimum.	— 15, 0
Intervalle de l'échelle parcouru. . . .	43, 8

Le *maximum* moyen et le *minimum* moyen sont les moyennes des plus hautes et des plus basses températures observées jour par jour.
Le *maximum* absolu et le *minimum* absolu sont la plus haute et la plus basse températures qui ont été observées pendant le mois entier.

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS. 8 heures matin.	9 heures matin.	MIDI.	3 heures soir.	6 heures soir.	9 heures soir.	MAXIMUM absolu.	MINIMUM absolu.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
	l	l	l	l	l	l	l	l	l		
Janvier. . .	755,055	755,292	755,065	754,903	754,878	754,994	774,380	740,320	34,060	8, à 9 h. mat.	24, à midi.
Février. . .	56,601	56,537	55,935	55,518	55,974	56,467	67,138	35,637	31,501	10, à midi.	26, à 4 1/2 h. soir
Mars. . . .	55,502	55,696	55,692	55,290	55,555	55,770	66,943	40,661	26,282	22, à 9 h. soir.	6, à 9 h. soir.
Avril. . . .	50,953	51,010	50,535	49,966	49,848	50,164	65,750	36,540	29,210	1, à 9 h. mat.	30, à 6 h. soir.
Mai	54,403	54,353	54,205	53,857	53,832	54,463	64,882	44,345	20,537	9, à 9 h. mat.	1, à 8 h. mat.
Juin. . . .	56,096	55,967	55,689	55,604	55,746	56,372	62,647	45,587	17,060	21, à 8 h. mat.	26, à midi.
Juillet . . .	57,297	57,380	56,991	56,680	56,600	57,097	65,370	48,789	16,581	6, à 9 h. mat.	12, à 6 h. soir.
Août. . . .	55,318	55,646	55,366	54,943	54,855	55,464	62,587	46,822	15,765	29, à 9 h. mat.	20, à midi.
Septembre. .	56,101	56,309	56,100	55,626	55,549	55,982	64,950	45,971	18,979	24, à 8 h. mat.	30, à 9 h. soir.
Octobre. . .	58,107	58,293	57,992	57,762	57,964	58,139	68,807	42,884	25,923	18, à 9 h. mat.	1, à 9 h. soir.
Novembre. .	56,016	56,076	55,699	55,439	55,590	55,735	71,846	40,424	31,422	29, à 8 h. mat.	16, à 3 h. soir.
Décembre . .	55,252	55,417	55,230	55,267	55,536	55,993	70,092	40,333	29,759	27, à 9 h. mat.	7, à 3 h. soir.
MOYENNES . .	755,558	755,665	755,375	755,071	755,161	755,553	767,116	742,359	24,757		

Maximum absolu de l'année 774l, 380
Minimum » » 735, 637
Intervalle de l'échelle parcouru . . 38, 743

EAU TOMBÉE DU CIEL. — ÉTAT DE LA RIVIÈRE.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée en pouces des Pays-Bas (cent.) de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEUR DE LA MEUSE, EN AUNES DES PAYS-BAS (MÈTRES).					
				HAUTEUR MOYENNE par mois.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier	19	4^{p},158	0^{p},219	+ 0^{a},955	+ 1^{a},98	+ 0^{a},45	1^{a},53	1	31
Février	21	3, 881	0, 185	+ 1, 344	+ 2, 23	+ 0, 25	1, 98	9	2
Mars.	22	3, 166	0, 144	+ 2, 631	+ 4, 11	+ 1, 13	2, 98	5	31
Avril.	16	2, 806	0, 175	+ 0, 567	+ 1, 10	+ 0, 34	0, 76	1	30
Mai	10	3, 395	0, 340	+ 0, 509	+ 0, 97	+ 0, 21	0, 76	5	20
Juin	19	11, 292	0, 594	+ 0, 660	+ 1, 20	+ 0, 40	0, 80	14	26
Juillet.	18	10, 023	0, 557	+ 1, 006	+ 2, 53	+ 0, 46	2, 07	3	23
Août.	23	5, 395	0, 235	+ 0, 431	+ 0, 85	+ 0, 15	0, 70	22	19
Septembre . .	16	6, 537	0, 409	+ 0, 389	+ 0, 88	+ 0, 05	0, 83	5	30
Octobre	15	3, 340	0, 223	— 0, 068	+ 0, 15	— 0, 20	0, 35	6	22, 23 et 24
Novembre. . .	24	9, 446	0, 394	+ 1, 210	+ 3, 18	— 0, 23	3, 41	24	2
Décembre. . .	19	5, 877	0, 309	+ 1, 789	+ 3, 17	+ 0, 89	2, 28	11	31
	TOTAL.	TOTAL.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.		
	222	69^{p}, 316	0^{p}, 315	+ 0^{a},952	+ 1^{a},863	+ 0^{a},325	1^{a}, 538		

En divisant la hauteur de l'eau tombée par mois, par le nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle correspondant, on obtient la hauteur moyenne de l'eau tombée par chacun de ces jours.

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.							
	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	4	2	2	0	4	4	13	2
Février . . .	5	0	1	0	1	7	13	1
Mars	4	2	2	0	1	5	15	2
Avril.	9	2	2	1	2	8	5	1
Mai	13	3	3	0	1	6	3	2
Juin	1	3	0	0	0	4	20	2
Juillet.	3	2	2	0	3	2	15	4
Août	3	3	2	0	2	3	14	4
Septembre . . .	5	1	0	0	3	8	8	5
Octobre . . .	0	0	0	0	6	9	12	4
Novembre . . .	2	2	0	0	2	11	12	1
Décembre . . .	5	1	1	0	5	9	10	0
Totaux	54	21	15	1	30	76	140	28

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE							
	PLUIE.	GRÊLE.	NEIGE.	GELÉE.	TONNERRE	BROUILLARD	CIEL entièrement COUVERT.	CIEL sans NUAGES.
Janvier	13	0	8	22	0	10	8	1
Février	17	2	9	13	0	0	5	0
Mars	21	1	2	6	0	0	3	0
Avril	16	2	0	1	0	3	2	0
Mai	10	2	0	2	3	2	0	4
Juin	19	0	0	0	6	1	1	0
Juillet	18	0	0	0	4	2	2	0
Août	23	0	0	0	1	1	0	0
Septembre	16	0	0	0	0	4	3	1
Octobre	15	0	0	0	0	1	0	1
Novembre	22	1	7	10	0	1	8	0
Décembre	18	0	1	8	0	3	9	2
TOTAUX.	208	8	27	62	14	28	41	9

Résumé des observations météorologiques faites à Maestricht pendant l'année 1832.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle centigrade ; les hauteurs du baromètre, réduites à la température de la glace fondante, et corrigées de l'effet de la capillarité, sont énoncées en lignes des Pays-Bas (millimètres). La cuvette du baromètre est placée à 52^{a}, 51 au-dessus du niveau de la mer.

Enfin les hauteurs des eaux de la Meuse sont observées à l'entrée de la grande écluse du bassin à Maestricht, et rapportées à la moyenne hauteur du niveau de ce bassin, laquelle est fixée à 41, 95 aunes (mètres) au-dessus du zéro de l'échelle d'Amsterdam (*peil-schaal*).

TEMPÉRATURE.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS.					
	8 heures du matin.	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir.	6 heures du soir.	9 heures du soir.
Janvier . .	— 0°,62	— 0°,30	+ 1°,51	+ 1°,65	+ 0°,78	— 0°,61
Février . .	+ 0, 29	+ 0, 96	+ 3, 92	+ 4, 58	+ 3, 35	+ 1, 63
Mars . . .	+ 3, 27	+ 4, 00	+ 6, 26	+ 6, 95	+ 5, 93	+ 4, 36
Avril . . .	7, 59	9, 37	13, 14	14, 22	13, 05	9, 26
Mai	11, 35	12, 60	15, 11	15, 74	14, 37	11, 49
Juin. . . .	16, 20	17, 17	18, 79	18, 96	17, 54	15, 13
Juillet. . .	15, 80	16, 95	19, 28	20, 07	18, 28	14, 99
Août . . .	17, 59	19, 14	21, 92	21, 45	19, 97	16, 85
Septembre.	12, 23	14, 08	17, 19	17, 66	14, 66	12, 20
Octobre . .	8, 80	10, 19	13, 36	13, 27	11, 02	9, 24
Novembre.	2, 81	3, 54	6, 71	6, 62	4. 67	3, 52
Décembre.	2, 79	3, 22	4, 86	4, 96	4, 16	3, 35
MOYENNES.	+ 8°,18	+ 9°,24	+11°,84	+12°,18	+10°,65	+ 8°,45

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
Janvier . . .	+ 1°,85	— 1°,39	3°,24	+ 8°,5	— 9°, 6	18°,1	10, à midi.	nuit. du 31 décem. 1831, au 1er janvier 1832.	8°,2 les 15 et 24.
Février . . .	4, 70	— 1, 06	5,76	8, 5	— 6, 5	15,0	5, à midi.	du 15 » 16	11°,0 les 20 et 25.
Mars	7, 17	+ 2, 21	4,96	14, 0	— 2, 0	16,0	31, à 3 h. s.	du 29 f. au 1er m.	12°,5 le 31
Avril	14, 30	4, 28	10,02	19, 3	+ 0, 3	19,0	24, à 3 h. s.	du 10 » 11	14, 1 » 23
Mai	16, 03	8, 87	7,16	25, 2	+ 2, 2	23,0	7, à 3 h. s	du 9 » 10	13, 3 » 29
Juin	19, 78	13, 55	6,23	24, 4	+ 8, 9	15,5	12, à midi.	du 5 » 6	11, 3 » 6
Juillet . . .	20, 22	»	»	32, 3	»	»	14, à 3 h. s.	»	»
Août	22, 37	»	»	28, 2	»	»	13, à midi.	»	»
Septembre . .	17, 82	»	»	21, 3	»	»	24 et 26 à 3 h. s.	»	»
Octobre . . .	13, 78	7, 73	6,05	20, 2	— 1, 2	21,4	2, à 3 h. s.	du 25 » 26	11, 4 » 26
Novembre . .	7, 08	1, 93	5,15	13, 8	— 4, 0	17,8	1, à 3 h. s.	du 24 » 25	9, 7 » 14
Décembre . .	5, 24	1, 89	3,35	12, 0	— 4, 9	16,9	2, à midi.	du 30 » 31	9, 4 » 17
MOYENNES . .	12°,53	»	»	+ 18°,98	»	»	»	»	»

Extrêmes de l'année. . . . . . { *Maximum.* + 32°,3 / *Minimum.* — 9, 6

Intervalle de l'échelle parcouru. . . . 41,9

N.B. Le thermomètre à *minimum* n'a pu être consulté pendant les mois de juillet, août et septembre.

Le *maximum* moyen et le *minimum* moyen sont les moyennes des plus hautes et des plus basses températures observées jour par jour.
Le *maximum* absolu et le *minimum* absolu sont la plus haute et la plus basse températures qui ont été observées pendant le mois entier.

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS. 8 heures matin.	9 heures matin.	MIDI.	3 heures soir.	6 heures soir.	9 heures soir.	MAXIMUM absolu.	MINIMUM absolu.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
	l	l	l	l	l	l	l	l	l		
Janvier . . .	759,47	759,65	759,22	759,09	759,16	759,24	772,22	744,24	27,98	15, à 9 h. soir.	7, à 9 h. soir.
Février. . .	761,11	761,19	760,95	760,61	760,49	761,25	769,79	743,25	26,54	9, à 9 h. mat.	2, à 3 h. soir.
Mars. . . .	756,63	756,75	756,48	756,04	756,21	756,43	768,01	540,28	27,73	1, à 9 h. soir.	20, à 8 h. mat.
Avril. . . .	758,37	758,41	757,82	757,31	757,13	757,67	772,60	737,09	35,51	4, à 9 h. mat.	30, à 10 h. mat.
Mai	756,78	756,80	756,35	756,09	755,97	756,55	764,60	743,07	21,53	24, à midi.	1, à 6 h. soir.
Juin. . . .	755,43	755,13	754,99	754,82	754,84	755,28	766,67	745,32	21,35	30, à 8 h. mat	4, à midi.
Juillet . . .	759,76	759,96	759,76	759,52	759,53	759,77	766,36	752,88	13,48	15, à midi.	12, à 9 h. soir.
Août. . . .	758,19	758,13	757,80	757,49	757,57	757,82	765,66	740,00	25,66	11, à 8 h. mat.	28, à midi.
Septembre. .	762,62	762,77	762,40	762,22	762,36	762,77	771,42	750,07	21,35	22, à 9 h. mat.	1, à 6 h. soir.
Octobre. . .	762,08	762,18	761,65	761,40	761,62	761,90	770,48	746,17	24,31	25, à 9 h. mat.	5, à 6 h. soir.
Novembre. .	756,43	756,68	756,42	756,37	756,68	756,89	769,37	743,20	26,17	17, à 9 h. mat.	3, à 8 h. mat.
Décembre . .	758,99	759,20	758,99	758,86	759,10	759,40	771,11	742,93	28,18	12, à midi.	3, à 9 h. soir.
MOYENNES . .	758,82	758,90	758,57	758,32	758,39	758,75	769,02	744,04	24,98		

Maximum absolu de l'année 772l, 60

Minimum » » 737, 09

Intervalle de l'échelle parcouru . . 35, 51

EAU TOMBÉE DU CIEL. — ÉTAT DE LA RIVIÈRE.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée en pouces des Pays-Bas (cent.) de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEUR DE LA MEUSE, EN AUNES DES PAYS-BAS (MÈTRES). Hauteur moyenne par mois.	Maximum absolu par mois.	Minimum absolu par mois.	Différence.	Date du maximum.	Date du minimum.
Janvier	10	4p,2054	0p,4205	+ 1a,349	+ 3a,16	+ 0,a52	2a,64	14	9 et 10
Février	9	1, 1027	0, 1225	+ 0, 719	+ 1, 30	+ 0, 30	1, 00	4	29
Mars.	13	4, 0512	0, 3116	+ 0, 704	+ 1, 58	+ 0, 20	1, 38	22	5, 6 et 7
Avril.	10	2, 5889	0, 2589	+ 0, 210	+ 0, 60	+ 0, 02	0, 58	1	26
Mai	19	8, 3792	0, 4410	+ 0, 344	+ 0, 70	+ 0, 95	0, 65	6	31
Juin	24	10, 9821	0, 4576	+ 0, 207	+ 0, 43	— 0, 05	0, 48	11	3
Juillet.	17	5, 0908	0, 2995	— 0, 143	+ 0, 07	— 0, 27	0, 34	1	22, 23, 25, 31
Août.	19	10, 2603	0, 5400	— 0, 278	+ 0, 06	— 0, 35	0, 41	31	15
Septembre . .	13	2, 2608	0, 1739	— 0, 087	+ 0, 66	— 0, 33	0, 99	1	27, 28, 29, 30
Octobre	16	4, 6402	0, 2900	— 0, 242	+ 0, 11	— 0, 37	0, 48	8	27, 28, 29
Novembre. . .	12	7, 0432	0, 5869	+ 0, 293	+ 1, 08	— 0, 35	1, 43	5	1
Décembre. . .	18	6, 7151	0, 3731	+ 1, 777	+ 3, 53	+ 0, 81	2, 72	5	15
	TOTAL. 180	TOTAL. 67p, 3199	MOYENNE. 0p, 3563	MOYENNE. + 0a,404	MOYENNE. + 1a,107	MOYENNE. + 0a,015	MOYENNE. 1a, 092		

En divisant la hauteur de l'eau tombée par mois, par le nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle correspondant, on obtient la hauteur moyenne de l'eau tombée par chacun de ces jours.

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.							
	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	7	1	2	0	1	7	7	6
Février	4	3	3	0	2	6	8	3
Mars	6	1	3	0	0	8	11	2
Avril	5	5	3	0	1	2	12	2
Mai	6	0	1	0	3	9	8	4
Juin	4	0	0	0	0	4	18	4
Juillet.	6	0	0	0	2	1	11	11
Août	0	1	0	0	3	2	22	3
Septembre . . .	4	2	2	0	2	6	13	1
Octobre	2	1	6	0	2	1	14	5
Novembre . . .	3	3	3	1	9	2	7	2
Décembre . . .	1	0	1	3	5	12	8	1
Totaux. . . .	48	17	24	4	*30	60	139	44

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE							
	PLUIE.	GRÊLE.	NEIGE.	GELÉE.	TONNERRE	BROUILLARD	CIEL entièrement COUVERT.	CIEL sans NUAGES.
Janvier	7	0	4	21	0	7	10	2
Février	8	0	1	21	0	5	6	10
Mars	13	3	3	17	1	3	6	2
Avril	10	0	0	5	0	3	0	2
Mai	19	5	0	2	2	1	0	0
Juin	24	2	0	0	6	0	1	0
Juillet	17	1	0	0	3	0	2	1
Août	19	2	0	0	5	1	2	0
Septembre	13	0	0	0	0	1	0	4
Octobre	16	0	0	0	1	5	1	0
Novembre	11	0	1	16	0	2	3	5
Décembre	17	1	2	7	0	2	5	1
TOTAUX.	174	14	11	89	18	30	36	27

Le seul phénomène remarquable observé à Maestricht pendant l'année 1832, c'est celui qui a été vu d'une grande partie de l'Europe dans la nuit du 12 au 13 novembre. D'après le témoignage des témoins oculaires, au nombre desquels je suis fâché de ne pas me trouver, le météore consistait en un nombre très-considérable d'étoiles filantes et de globes lumineux qui répandaient une grande clarté, laquelle a été distinguée jusqu'à 6 ½ h. du matin. Pendant la nuit, la température était descendue à + 0°,9, le baromètre était de 2 millimètres environ au-dessous de la moyenne hauteur, le ciel un peu nuageux et le vent au sud. Durant la matinée du 13, il s'est formé un brouillard qui est devenu épais vers le soir.

Instans du maximum *et du* minimum *de hauteur diurne du baromètre*, *et étendue de la période*.

De même qu'en 1831, j'ai fait journellement, pendant l'année dernière, des observations de baromètre et de thermomètre à huit heures du matin et à six heures du soir, outre celles aux quatre époques accoutumées. Ces observations additionnelles ont eu pour but de déterminer les instans précis du *maximum* et du *minimum* de hauteur diurne du baromètre, et l'étendue de cette variation. Les tableaux des deux années montrent que l'instant du *maximum* arrive *après* huit heures du matin, puisque à 9 heures la hauteur de la colonne est plus grande; et que celui du *minimum* a lieu *avant* 6 heures du soir, car à cette époque la colonne est plus élevée qu'à trois. Le calcul a achevé de préciser les instans cherchés. Pour cela j'ai fait usage de la méthode d'interpolation suivante due à *Lagrange*. Soient α, β, γ, δ les instans des observations, comptés de minuit; a, b, c, d les hauteurs du baromètre qui correspondent respectivement à ces instans, et soit y la hauteur du baromètre au temps marqué par x, on aura l'équation

$$y = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + \ldots .$$

dans laquelle

$$A=\frac{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)};\ B=\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)};$$

$$C=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)};D=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\ \text{etc.}\ ..$$

Différentiant, puis posant $\frac{dy}{dx}=o$, et déterminant les valeurs de x qui satisfont à cette condition, ce seront les instans de la plus grande et de la plus petite hauteur diurne.

J'aurais voulu faire entrer dans cette équation les six époques d'observation à la fois. Dans ce cas les valeurs de x qui satisfont à la condition de $\frac{dy}{dx}=o$ sont données par une équation du 4e degré; mais alors les calculs numériques pour la formation des coefficiens deviennent d'une longueur excessive et d'autant plus fatigante, que l'on n'a pas de moyen de vérification pour s'assurer durant le cours des opérations, si l'on ne commet pas d'erreur de chiffre ou de signe. J'ai donc préféré de calculer séparément l'instant du *maximum* en employant les observations de 8, 9, 12 et 15 heures; ensuite celui du *minimum* par celles de 12, 15, 18 et 21 heures. Quant aux hauteurs barométriques, j'ai pris les moyennes entre celles obtenues aux heures correspondantes en 1831 et 1832. Ces moyennes, réduites à zéro de température, sont :

8 heures.	9 heures.	12 heures.	15 heures.	18 heures.	21 heures.
mm	mm	mm	mm	mm	mm
757,190	757,284	756,972	756,695	756,775	757,151

Le calcul m'a donné $9^h.184$ ou $9^h.11'.2''$ du matin pour l'instant du *maximum*, et $15^h.76$ ou $3^h.45'.36''$ après midi, pour l'instant du *minimum*.

Substituant ensuite ces valeurs de x dans l'équation primitive, j'en ai déduit les valeurs correspondantes de y, c'est-à-dire les hauteurs auxquelles la colonne mercurielle se trouve à ces deux

époques; j'ai trouvé de cette manière 757,mm2876 pour le *maximum*, et 756mm,6837 pour le *minimum*. D'après cela, l'étendue de la variation diurne serait de 0mm,6039 au lieu que les deux époques de 9 heures du matin et de 3 heures du soir, ne donnent que 0mm,5890; la différence est de 0mm,0149. Quelques années de plus d'observations permettront de répondre à la question si les *maximums* et *minimums* arrivent aux mêmes instans du jour aux diverses époques de l'année.

Correction de la hauteur observée du baromètre pour la réduire à zéro de température.

Un objet très-important à considérer dans les observations barométriques, c'est la réduction de la colonne mercurielle à une température constante. Très-souvent on se borne à faire entrer en ligne de compte la dilatation du mercure, sans faire attention à celle de l'échelle; dans ce cas, la colonne réduite sera trop courte de toute la quantité dont l'échelle elle-même s'est dilatée. Or, selon la matière dont l'échelle est faite, sa dilatation peut être assez forte pour avoir une influence notable sur les hauteurs barométriques que l'on veut comparer entre elles, et qui ont été observées à des températures différentes. Voici les considérations qui conduisent à la formule exacte :

Soit l la hauteur de la colonne à o° de température, L celle à $+ t^\circ$, la pression atmosphérique restant la même; nommons d la densité du mercure à o°, D celle à $+ t^\circ$, il est prouvé par les lois de l'hydrostatique que

$$l : L = D : d,$$

d'ailleurs les densités d, D, sont en raison inverse des volumes qu'une même masse occupe aux températures o° et t°; désignant par v un volume quelconque de mercure à o°, ce volume, en passant à t° de température, se change en $v(1+mt)$,

m exprimant la dilatation cubique du mercure, de sorte que

$$D : d = v : v(1 + mt) = 1 : 1 + mt,$$

ainsi

$$l : L = 1 : 1 + mt,$$

d'où

$$l = L \frac{1}{1 + mt}.$$

Telle serait à $0°$ de température la hauteur d'une colonne qui a été trouvée égale à L à la température $+ t°$, en ne tenant compte que de la dilatation du mercure. Mais la matière de l'échelle s'étant également dilatée, chacune des divisions de L n'est plus égale à l'unité de mesure comme cela avait lieu, par supposition, à la température de la glace fondante ; chacune d'elles vaut maintenant $1 + kt$, k étant la dilatation linéaire de la matière de l'échelle, pour $1°$; par conséquent, les L divisions apparentes en valent réellement $L(1 + kt)$; telle est donc la véritable *hauteur observée* du baromètre, de sorte qu'il faut écrire cette dernière quantité au lieu de L dans la valeur réduite l, laquelle deviendra par conséquent,

$$l = L \frac{1 + kt}{1 + mt}$$

elle se réduit à

$$l = L[1 - t(m - k)],$$

en opérant la division indiquée et en négligeant les termes où les coefficiens m, k, montent à des degrés supérieurs au premier.

Cette formule se change en celle ordinairement employée, et où l'on n'a égard qu'à la seule dilatation du mercure, en posant $k = o$, l'erreur que l'on commet par là est égale à Ltk ; le terme correctif se réduisant à Ltm.

Évaluons cette erreur. Pendant le mois le plus chaud de l'été, on peut admettre que la température moyenne du baromètre

est de + 24°, tandis que pendant le mois le plus froid, elle ne sera guère supérieure à 0°, de sorte qu'il arrivera souvent que l'on aura à comparer des hauteurs barométriques observées à des températures distantes l'une de l'autre de 24°; admettons que dans ces deux circonstances, le baromètre se trouve à la moyenne hauteur L = 760, on aurait pour L*tk* 0^mm^,343 si l'échelle était en laiton; 0^mm^,159 si elle était tracée sur le tube de cristal lui-même, et 0^mm^,074 si elle était en sapin, en prenant pour ce bois, d'après le capitaine *Kater*, k=0,0000408. Ces quantités sont trop fortes pour qu'il soit permis de les négliger dans des observations faites avec un peu de soin, et il est donc clair que la dilatation de la matière de l'échelle doit être prise en considération lors même que l'échelle serait en *bois* de sapin, substance dont le changement de longueur par *la* variation de température est regardée ordinairement comme insignifiante. Cependant il arrive souvent que le coefficient k de la matière de l'échelle n'est pas connu; il ne l'est en effet que pour un petit nombre de bois, et il est probable que, pour une même espèce, sa valeur varie selon la compacité du bois, la direction de ses fibres et peut être son degré de dessication; aussi le nombre que j'ai rapporté ci-dessus pour le bois de sapin, n'est-il pas adopté par tous ceux qui se sont occupés de cet objet, il y en a qui le portent à 0,00001; *Roi* prétend que le sapin se comporte comme le verre, d'autres enfin pensent que sa dilatation est tout-à-fait nulle. Il arrive encore que les échelles des baromètres sont faites de diverses pièces, de nature différente, tellement assemblées que leur jeu par la dilatation se complique d'une manière difficile à décider par le calcul, quand bien même le coefficient de chaque partie serait connu. Ces difficultés m'ont fait naître l'idée de déterminer le coefficient correctif par une méthode que je vais exposer.

Que l'on aie deux baromètres d'une construction quelconque, pourvu qu'ils soient propres à des expériences exactes. Supposons-les placés au même niveau, et notons les hauteurs auxquelles leurs colonnes s'élèvent au même instant, et les degrés marqués par leurs thermomètres. Ces hauteurs, réduites

à une température fixe, en général différeront l'une de l'autre d'une certaine quantité λ, laquelle sera constante, quels que soient les degrés de chaleur auxquels les instrumens sont exposés, et qu'ils soient les mêmes ou différens pour chacun d'eux, pourvu que l'on emploie pour chaque baromètre le coefficient correctif qui lui est propre. Ainsi ces coefficiens doivent être tels qu'ils satisfont à la condition de réduire à une différence constante les hauteurs observées à des températures quelconques, sous la même pression atmosphérique.

D'après cela, soit A la hauteur marquée par l'un des baromètres, a le degré de son thermomètre, indiquons par n le coefficient à l'aide duquel on opère à la fois la correction pour la dilatation du mercure et pour celle de l'échelle, de sorte que $n=m-k$, et désignons par α la hauteur réduite à la température de la glace fondante.

Soit au même instant B la hauteur de l'autre baromètre, b sa température, n' son coefficient correctif, comprenant l'effet de la dilatation du mercure et de l'échelle, et β sa hauteur réduite à zéro.

Enfin, soient dans d'autres momens A′, A″ les hauteurs du premier instrument, a', a'' la température, α', α'' les hauteurs réduites à zéro à l'aide du coefficient n; pendant qu'aux instans correspondans, le second instrument se trouve aux hauteurs B′, B″, son thermomètre marquant les degrés b', b'', et les hauteurs réduites à zéro, à l'aide du coefficient n', étant désignées par β', β''. On aura les équations suivantes.

$$\alpha = A\,(1-an)\text{; au même instant } \beta = B\,(1-bn')$$
$$\alpha' = A'(1-a'n) \qquad \text{—} \qquad \beta' = B'(1-b'n')$$
$$\alpha'' = A''(1-a''n) \qquad \text{—} \qquad \beta'' = B''(1-b''n')$$

et comme $\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=\alpha''-\beta''=\lambda$; il s'en suit que :

$$A\,(1-an)-B\,(1-bn')=\lambda$$
$$A'(1-a'n)-B'(1-b'n')=\lambda$$
$$A''(1-a''n)-B''(1-b''n')=\lambda$$

équations à l'aide desquelles on déterminera les valeurs des in-

connues n, n', λ. Il est clair que, pour plus d'exactitude, les quantités A, B, A', B', A'', B'', a, b, a', b', a'', b'', doivent être les moyennes d'un grand nombre d'observations simultanées.

Voici les résultats obtenus avec deux baromètres à niveau constant, dont les planchettes sont en bois d'acajou massif, et les échelles tracées sur des lames de laiton encastrées dans le bois.

Une première série d'observations simultanées pendant laquelle les deux instrumens étaient placés dans une même chambre, non échauffée, a donné pour moyennes :

$$A = 774{,}057,\quad a = -0^\circ{,}122;\quad B = 773{,}697,\quad b = +0^\circ{,}133.$$

Deux autres séries pendant lesquelles les deux instrumens étaient placés chacun dans une chambre différente, ont fourni :

$$A' = 766{,}643,\ a' = +10^\circ{,}842;\ B' = 764{,}761,\ b' = -1^\circ{,}383$$
$$A'' = 769{,}466,\ a'' = +10^\circ{,}464;\ B'' = 768{,}024,\ b'' = +1^\circ{,}829$$

Ces quantités substituées dans les équations, donnent pour les inconnues $n' = 0{,}0001587$, $n' = 0{,}0001619$, $\lambda = 0{,}^{mm}3917$.

D'autres séries, dans lesquelles tantôt l'un, tantôt l'autre des deux baromètres était placé dans la chambre chaude, pendant que le second était dans la chambre froide, m'ont fourni des valeurs un peu différentes de celles que je viens de rapporter, de sorte qu'en prenant les moyennes entre plusieurs, je suis conduit à $n = 0{,}00015954$, $n' = 0{,}00016237$. Si nous nous rappelons maintenant que $n = m - k$, $n = m - k'$, et que $m = 0{,}00018018$, nous aurons pour le coefficient de dilatation de la matière des échelles $k = 0{,}000020638$ et $k' = 0{,}000017806$. Le premier nombre ne diffère guère du coefficient de dilatation de l'étain; le second est à peu près celui qui appartient au cuivre.

On doit être étonné qu'une planchette en acajou exerce une influence si grande sur le terme correctif de la température;

et, ce qui plus est, que deux planchettes à fibres très-droites, tirées d'un même bloc, et en apparence d'un bois tout-à-fait semblable, exercent des influences de valeur sensiblement différentes.

Les nombreuses observations faites dans le but de déterminer les coefficiens correctifs, m'ont fourni l'occasion de me convaincre combien on peut être en erreur si, pour fixer la marche comparative de deux baromètres, on se contente de les placer l'un à côté de l'autre et de les observer simultanément une ou deux fois. En effet, prévenu des anomalies qui existent parfois dans les hauteurs relatives des deux instrumens, j'ai mis un soin particulier à éviter les erreurs d'observation dans les séries rassemblées pour la formation des coefficiens. Soit que les deux baromètres fussent placés dans la même chambre, soit qu'ils fussent placés dans des chambres différentes, je n'en prenais les hauteurs que lorsque j'étais persuadé qu'ils eussent acquis, dans toutes leurs parties, une température égale; elle est indiquée par des thermomètres dont les réservoirs sont placés dans des bouts de tube semblables à ceux des baromètres et remplis de mercure; les échelles sont assez longues pour que chaque degré y soit subdivisé en cinq parties égales, dont il est facile d'apprécier $\frac{1}{10}$e. Les échelles des baromètres sont disposées de telle manière que je suis certain que les erreurs sur les hauteurs de la colonne sont moindres que $\frac{1}{40}$e de millimètre. Je continuais chaque série pendant 10, 20, 30 jours, en observant plusieurs fois par jour; j'avais grand soin aussi d'imprimer de petites secousses sur toute la longueur des instrumens, afin de vaincre la résistance que le mercure éprouve à se mouvoir dans des tubes de verre, lors même que leur largeur est de 8 à 9 millimètres. Malgré toutes ces précautions j'ai remarqué des variations fréquentes dans les différences des hauteurs relatives des deux instrumens: souvent après plusieurs jours d'exposition à un même endroit, je voyais la différence diminuer graduellement et jusqu'à n'être que la moitié de ce qu'elle était d'abord, puis augmenter de nouveau, et cela sans la moindre relation avec les change-

mens dans la température ambiante, non plus qu'avec les variations dans l'état hygrométrique de l'air qui eussent pu produire un jeu inégal dans le bois des deux instrumens. Ces variations hygrométriques n'avaient lieu d'ailleurs que dans des limites très-resserrées dans les endroits où se faisaient les expériences, et ne pouvaient dans aucun cas exercer une influence notable sur les différences observées, quand les instrumens avaient la même exposition, vu la parfaite égalité de toutes les pièces qui entraient dans leur construction. De sorte que je ne puis assigner la cause des anomalies que les hauteurs comparatives m'ont montrées. Une fois je croyais l'avoir trouvée : ayant remarqué que les différences allaient en augmentant à mesure que la température croissait dans la chambre dans laquelle les instrumens étaient placés; j'imaginai *que le* baromètre dont la hauteur était la plus petite pouvait contenir une petite quantité d'air dans la capacité du tube au-dessus de la colonne de mercure; la dilatation de cet air par la chaleur aurait déprimé la colonne mercurielle, et, par conséquent, aurait fait augmenter, à mesure de l'accroissement de température, la différence de hauteur de cette colonne par rapport à celle de l'autre baromètre qui n'aurait point contenu d'air. Cependant je me convainquis bientôt que cette supposition n'était pas fondée, en voyant que les variations dans les différences de hauteur prenaient une marche décroissante là où elle aurait dû être croissante dans l'hypothèse posée; en un mot, en voyant que la variation avait lieu indépendamment des changemens dans la température et dans le degré d'humidité de l'air. Au surplus, en inclinant les deux baromètres, je vis que l'un et l'autre contenaient une bulle d'air très-petite et sensiblement de même grosseur.

Formule corrective pour un baromètre qui contient de l'air.

L'existence d'une petite quantité d'air au sommet de la colonne mercurielle, bien qu'elle ne soit pas la cause des aberrations dont il vient d'être question, n'en exerce pas moins

une influence sur les hauteurs absolues des colonnes : elle les diminue d'une quantité plus ou moins grande selon la force élastique de cet air, laquelle dépend et de la température et de la capacité du tube au-dessus du mercure dans laquelle cet air se répand, deux circonstances qui varient continuellement. J'ai voulu connaître la valeur de cette influence dans les baromètres employés ; de plus, j'ai pensé que c'était une question intéressante que celle de déterminer la correction qu'exige un baromètre contenant une certaine quantité d'air, pour ramener la hauteur de sa colonne au cas d'un instrument parfaitement purifié. La chose m'a paru d'autant plus importante que le plus grand nombre des baromètres renferment une petite quantité d'air, de l'existence de laquelle on peut s'assurer en inclinant l'instrument pour faire couler le mercure jusqu'au sommet. Ce n'est que par des ébullitions répétées une ou deux fois que l'on parvient à en purger le tube ; car à la première ébullition, quelque soignée qu'elle ait été, il est resté disséminé dans le tube une foule de petites bulles qui échappent à la vue et qui, à cause de leur extrême ténuité, ne peuvent vaincre l'adhésion des molécules du mercure et s'élever au-dessus de lui. Mais lorsqu'ensuite on redresse le tube et que parlà on rend nulle la pression au sommet de la colonne, toutes les bulles qui y étaient disséminées se dégagent et se rassemblent ensuite en une bulle unique, lorsque l'on incline de nouveau le tube ; celle-ci sera assez grande maintenant pour être visible. Dans une ébullition subséquente elle pourra être expulsée ; quelquefois même on y parvient par des chocs imprimés au tube, surtout si, pendant cette opération, le tube a été placé, l'ouverture vers le haut, sous une longue cloche pneumatique dans laquelle on aura fait le vide ; toutefois une nouvelle ébullition est préférable.

Couchons le baromètre dans une position horizontale, la bulle d'air sera soumise à la pression de l'atmosphère, pression que nous représenterons par P, et laquelle sera égale à la force élastique de l'air renfermé. Cet air se sera rassemblé dans un espace d'une forme sensiblement hémisphérique, étant li-

mité d'une part par la paroi du tube, laquelle peut être considérée, sans erreur notable, comme plane dans la petite étendue occupée par la bulle ; de l'autre côté la surface de la bulle est déterminée par la pression du mercure environnant. Ainsi en mesurant le diamètre de cet hémisphère, on peut en connaître le volume que je nommerai φ, la température étant supposée $= 0°$. Redressons l'instrument, le mercure y descendra jusqu'à une hauteur p au-dessus du niveau extérieur, il en résultera au-dessus du mercure un espace libre dont on peut déterminer la capacité, car l'on doit connaître le diamètre intérieur du tube, pour pouvoir apprécier l'abaissement dû à la capillarité ; de plus on mesurera la distance comprise entre le sommet du mercure et celui intérieur du tube ; soit ν cette capacité, la bulle d'air en s'y répandant perdra de sa *force* élastique, laquelle, de P qu'elle était sous le volume φ, deviendra maintenant égale à f, la température étant restée 0°; or, d'après la loi de *Mariotte*

$$f : \mathrm{P} = \varphi : \nu \quad \text{d'où} \; f = \mathrm{P}\,\frac{\varphi}{\nu}.$$

La colonne mercurielle renfermée dans le tube, subissant à son sommet une pression f, ne peut pas atteindre la hauteur P à laquelle elle s'élèverait si la partie supérieure du tube était parfaitement vide, elle aura une hauteur moindre que nous avons désignée par p, de sorte que, pour faire équilibre à la pression de l'atmosphère, il faudra que $p + f = \mathrm{P}$, d'où

$$p = \mathrm{P} - f = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\varphi}{\nu}\right) = \mathrm{P}\,\frac{\nu - \varphi}{\nu}$$

et de là $$\mathrm{P} = p\,\frac{\nu}{\nu - \varphi}$$

pour la pression effective de l'atmosphère, c'est-à-dire pour la hauteur vraie qu'aurait la colonne sans la présence de l'air. Sa valeur ne dépend que des capacités φ, ν qui sont connues

et de la hauteur p qui a été observée. On a pour la force élastique

$$f = P - p = p\left(\frac{v}{v-\varphi} - 1\right) = p\,\frac{\varphi}{v-\varphi}$$

Ceci posé, concevons que la pression de l'atmosphère change, et que de P elle devienne P', la température restant à 0°; alors l'équilibre n'aura plus lieu entre P' et $p+f$, il faudra que la longueur de la colonne, au lieu de p, soit p'; par-là, la capacité du tube au-dessus de la colonne sera changée de v en v', et par conséquent la force élastique de l'air renfermé sera devenue f', le rapport de cette dernière avec celle f, sera donné par la relation connue

$$f : f' = v' : v$$

de plus, il faudra maintenant encore que $f' + p' = P'$ ou $f' = P' - p'$; d'où, en substituant dans la proportion, on a

$$f : P' - p' = v' : v \text{ et de là } P' = f\frac{v}{v'} + p'$$

Le tube barométrique devant être sensiblement cylindrique au champ d'observation, les volumes v, v' sont ceux de deux cylindres de même base, par conséquent ils sont dans le rapport des longueurs. Soit donc l la longueur du tube barométrique comptée depuis le niveau du mercure de la cuvette jusqu'au sommet intérieur du tube, alors le cylindre v aura pour longueur $l-p$; celui v' aura pour longueur $l-p'$, et par conséquent

$$\frac{v}{v'} = \frac{l-p}{l-p'},$$

d'où, en substituant dans la valeur de P' ci-dessus,

$$P' = f\frac{l-p}{l-p'} + p'$$

et la quantité dont la colonne est abaissée au-dessous de sa vraie hauteur est

$$P' - p' = f \frac{l - p}{l - p'}.$$

Dans cette expression, f est déterminé une fois pour toutes; $l - p$ est aussi constant, de sorte qu'il n'y a de variable que le seul terme p'; à mesure qu'il augmente, la dépression $P' - p'$ de la colonne au-dessous de la vraie hauteur P' devient plus grande, toutes choses d'ailleurs égales; et en effet l'alongement de la colonne p', fait diminuer la hauteur $l - p'$ de la capacité cylindrique, ce qui fait accroître la force élastique de l'air qui y est renfermé, et par conséquent son pouvoir pour déprimer la colonne.

Examinons maintenant l'influence de la température. Et d'abord il est à observer que, pendant que l'on mesure le diamètre de la bulle d'air, le baromètre étant couché horizontalement, le thermomètre en général ne sera pas à zéro, comme je l'avais supposé, il se trouvera à $+ t°$; mais il sera facile de réduire le volume d'air à ce qu'il serait à 0°, car si nous posons que φ_1 est le volume observé à $t°$, et g le coefficient de dilatation des gaz, nous aurons pour le volume φ à 0°,

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{1 + gt}.$$

De même, lorsque le baromètre est redressé, et que la longueur de la colonne de mercure observée est p, supposons que la température soit différente de 0° et qu'elle soit $+ t'$; nommons v_1 le volume du cylindre que l'air occupe alors, ce volume se réduirait à v, si la température était 0°, et

$$v = \frac{v_1}{1 + gt'};$$

et ainsi la force élastique f que l'air aurait à la température de

la glace fondante, serait donnée par l'équation

$$f = p\,\frac{\varphi}{v - \varphi} = p\,\frac{\varphi_1(1 + gt')}{v_1(1 + gt) - \varphi_1(1 + gt')}.$$

Remarquons que la température serait sans influence sur la force élastique f, si elle était la même pour φ_1 et pour v_1; c'est-à-dire si $t = t'$, car alors

$$\frac{\varphi}{v - \varphi} = \frac{\varphi_1}{v_1 - \varphi_1}.$$

Il est évident que la hauteur p, telle qu'elle entre dans l'expression de f, et où elle indique la longueur de la colonne de mercure qui contre-balance en partie la pression P de l'atmosphère, devra être réduite à la température de la glace fondante, si, pendant l'observation, le thermomètre marquait un degré t' différent, et que, pour cet effet, il faudra employer la formule connue $p\,(1 - nt')$. Mais cette correction ne doit pas être faite à p dans le terme $l - p$ qui exprime la hauteur du cylindre occupé par l'air. La capacité v_1 de ce cylindre sera modifiée par la dilatation du cristal, de telle manière que sa grandeur réelle à t' degrés, rapportée à celle à zéro, sera $v_1(1+3ct')$, c étant la dilatation linéaire du cristal. Le rayon intérieur du tube qui était, par exemple, r, et la hauteur du cylindre qui était $l - p$ à zéro, seront à t' degrés $r\,(1 + ct')$ et $(l - p)\,(1 + ct')$.

Reste à déterminer l'influence de la variation de température sur la marche de l'instrument. Cette variation agit de trois manières sur le baromètre tel que nous l'avons supposé : 1° elle change la force élastique de l'air renfermé au sommet de la colonne ; celle-ci en éprouvera donc une dépression plus ou moins grande ; 2° elle modifie la densité de la colonne même, d'où il résulte que, pour faire équilibre à une même pression de l'atmosphère, elle devra prendre des longueurs différentes ; 3° enfin, en dilatant plus ou moins la matière du tube, la ca-

pacité de celui-ci en sera altérée ; cette circonstance n'affecte pas immédiatement la hauteur de la colonne de mercure, puisque la largeur d'un tube barométrique n'a pas d'influence sur la hauteur à laquelle le mercure s'y maintient par la pression extérieure (abstraction faite de la capillarité); mais il en résulte un changement dans la capacité de la partie du tube où l'air est logé, par suite un changement dans la force élastique de cet air, et par conséquent dans l'action déprimante qu'il exerce sur la colonne de mercure.

Commençons par l'influence sur la force élastique de l'air. Nous avons vu plus haut que lorsque P' était la pression de l'atmosphère, p' la hauteur de la colonne observée, f' la force élastique de l'air renfermé dans le tube, sous le volume v', nous avions les relations suivantes :

$$f' = P' - p' \quad \text{et} \quad f' = f\frac{v}{v'},$$

f étant la force élastique de l'air sous le volume v, et la température étant restée invariablement à zéro. Concevons maintenant que, pendant que la pression extérieure est P', la température, au lieu de rester à zéro, monte et devienne t, alors l'air renfermé tendra à se dilater, et si la pression à laquelle il est soumis et par suite sa force élastique restaient constantes, nonobstant son expansion, son volume v' se changerait en celui $v'(1 + gt)$. Cependant il ne pourra pas se dilater à ce point, puisqu'en déprimant la colonne de mercure dans le tube, il en augmente d'autant la pression qu'il subit. Il prendra donc réellement un volume V, plus grand que v', mais plus petit que $v'(1 + gt)$, et sa force élastique augmentera en même temps et deviendra F, de f' qu'elle était, de sorte que

$$F : f' = v'(1 + gt) : V$$

de là

$$F = f'\frac{v'}{V}(1 + gt)$$

mais $$f' = f\frac{v}{v'};$$

donc $$F = f\frac{v}{v'}\frac{v'}{V}(1 + gt) = f\frac{v}{V}(1 + gt).$$

La colonne mercurielle, observée dans le tube, sous la température t, a été trouvée d'une longueur p'; cette colonne est dilatée, à zéro elle aurait une longueur p'_1, tellement que $p_1' = p'(1 - nt)$, n étant le coefficient combiné de la dilatation du mercure et de la matière de l'échelle; ainsi la pression de la colonne dilatée p' est la même que celle d'une colonne qui aurait à zéro une longueur exprimée par $p_1' = p_1'(1 - nt)$. Pour l'équilibre avec la pression extérieure P', il faut que

$$P' = p_1' + F = p'(1 - nt) + F$$

ou, en substituant la valeur de F trouvée plus haut, il vient

$$P' = p'(1 - nt) + f\frac{v}{V}(1 + gt)$$

Évaluons les volumes v, V. Le premier est celui qu'occupe l'air à la température de la glace fondante (ou réduit à cette température), quand le mercure s'élève dans le tube à la hauteur p; alors la hauteur du cylindre d'air est $l - p$. Soit r le rayon intérieur du tube à la température de la glace fondante, nous aurons

$$v = r^2\pi(l - p)$$

Le volume V est celui que l'air occupe à la température t, alors, par la dilatation du cristal, le cylindre V a pour hauteur $(l - p')(1 + ct)$, c étant la dilatation linéaire du cristal; le rayon r du tube est maintenant $r(1 + ct)$, de sorte que l'expression du volume V est

$$V = r^2\pi(l - p')(1 + ct)^3 = r^2\pi(l - p')(1 + 3ct)$$

en développant $(1+ct)^3$, et en négligeant les termes où c monte au delà de la première puissance. D'après cela, on aura

$$\frac{v}{V}=\frac{l-p}{(l-p')(1+3ct)};$$

et par conséquent

$$P'=p'(1-nt)+f\frac{l-p}{l-p'}\cdot\frac{1+gt}{1+3ct},$$

ou enfin, puisque, sans erreur sensible,

$$\frac{1+gt}{1+3ct}=1+t(g-3c),$$

$$P'=p'(1-nt)+f(l-p)\frac{1+t(g-3c)}{l-p'}. \qquad \text{(A)}$$

Ainsi P' serait la hauteur exacte à laquelle le mercure s'élèverait dans le baromètre, s'il était parfaitement purgé d'air, et si la température était celle de la glace fondante. Les variables dans cette formule sont : la hauteur observée p' et la température t; le terme $g-3c$ est constant et le facteur $f(l-p)$ est déterminé une fois pour toutes pour le même instrument.

La partie

$$f(l-p)\frac{1+t(g-3c)}{l-p'}$$

que nous représenterons par K, exprime l'effet que l'air renfermé exerce sur la colonne mercurielle. Ce terme est toujours positif; car d'abord f, $l-p$, $l-p'$ sont essentiellement positifs dans le baromètre; ensuite, $g=0{,}00375$, $3c=0{,}00003$, il vient $g-3c=0{,}00372$, donc $t(g-3c)$ sera toujours une fraction plus petite que l'unité, lors même que la température serait de 100°; donc aussi, lors même que $t(g-3c)$ serait né-

gatif, par suite de ce que t serait une température inférieure à celle de la glace fondante, $1 - t(g - 3c)$ serait néanmoins positif dans toutes les circonstances où le baromètre peut se trouver. Dans le cas où $t = o$, on retombe sur

$$P' = p' + f\frac{l - p}{l - p'},$$

expression à laquelle nous étions arrivés en supposant que la température fût restée à zéro. Ainsi, quelle que soit la température, la colonne barométrique sera toujours déprimée à raison de l'air contenu dans le tube; cette dépression, tout le reste demeurant le même, est directement proportionnelle à la force élastique f; et remarquons que, pour une même quantité φ d'air resté dans le tube, la force élastique f est d'autant plus petite que la capacité v que le mercure laisse libre au haut du tube est plus grande. Si le baromètre était parfaitement purgé d'air, alors $f = o$, et la formule (A) se réduirait à celle $P' = p'(1 - nt)$, employée ordinairement pour la réduction à la glace fondante.

La formule (A) prouve encore que la dépression K croît avec la température, sans lui être directement proportionnelle. Donc si, dans la réduction à $o°$ de la colonne barométrique observée sous des températures différentes, on néglige le terme correctif K, on commet des erreurs, variables en grandeur avec la température, et par conséquent les hauteurs réduites ne sont pas exactement comparables entre elles. Il suit encore de là que si deux baromètres, dont on compare la marche, contiennent de l'air en quantité égale ou inégale, la différence λ des hauteurs que l'on obtient en réduisant à zéro, ne peut être constante que pour autant que l'on prend en considération le terme correctif affecté de la force élastique de l'air. Je ferai cependant encore remarquer ici que ce n'est pas pour avoir négligé cette correction que la différence λ des hauteurs des deux baromètres comparés pour en déduire le coefficient de dilatation, et dont il a été question ci-devant, a été trouvée

variable. Outre les motifs allégués, on en verra d'autres plus loin, qui ne laisseront plus le moindre doute.

Pour déterminer la valeur numérique des constantes qui entrent dans la formule (A), afin de l'adapter à l'un des baromètres employés aux observations simultanées dont il a été parlé plus haut, j'ai couché l'instrument dans une position horizontale, après avoir, par de légères secousses, amené la bulle dans un endroit du tube tourné vers le haut. Elle y est ramassée dans un espace sensiblement hémisphérique. Cela fait, j'ai pointé sur elle un microscope muni à son foyer d'une lame de verre divisée en 10èmes de millimètre. L'axe du microscope était placé perpendiculairement au plan qui passe par la base de la bulle. Puis, tournant le microscope autour de son axe, j'ai compté dans quatre directions faisant entre elles des angles de 45°, le nombre de divisions du micromètre que les diamètres de la bulle occupaient; je les ai trouvés de 24,0, 24,8, 24,3, 23,6; j'ai pris la moyenne ou 24,175 pour le diamètre de l'hémisphère; divisant cette longueur par 2,25, pouvoir amplifiant de la lentille objective du microscope, le quotient donne 10,74 dixièmes de millimètre ou 1,074 millimètre pour la longueur absolue du diamètre de la bulle.

A cause de la réfraction de la lumière dans les parois du tube, ce procédé de mesurage serait sujet à erreur et fournirait des longueurs trop petites pour le diamètre de la bulle, si celle-ci n'était pas très-mince et le diamètre du tube très-large, comme cela avait lieu dans le cas présent, et même dans celui-ci l'interposition de la paroi ne serait pas sans effet sur la grandeur apparente, si l'on n'avait soin d'employer une lentille objective de long foyer, afin que les incidences des rayons sur la paroi s'éloignent peu de la normale. Le procédé serait erroné sous un autre rapport, si la bulle n'était très-petite, puisque la pression du mercure environnant l'aplatirait et la réduirait à un volume moindre que celui d'une demi-sphère. Le léger aplatissement que la petite bulle observée éprouvait réellement, était compensé par la faible convexité que la courbure du tube donnait à sa base.

Avant l'opération de mesurage, le mercure se trouvait dans le baromètre à $764^{mm},10$, immédiatement après il était à $764^{mm},85$; la moyenne ou 764,48 pourra être considérée comme la hauteur à l'instant même de l'opération, hauteur que nous avons désignée par p. Le thermomètre du baromètre a été moyennement à $+ 24°,2 = t$ lors de la détermination des volumes φ et ν; ainsi, d'après la remarque faite plus haut, le rapport

$$\frac{\varphi}{\nu - \varphi}$$

est le même que si la température eût été à 0°.

Avec le diamètre $1^{mm},074$ on trouve pour le volume de la demi-sphère d'air $\varphi = 0,32433$ millimètre cube.

La longueur entière du tube barométrique $= l$	$=$	mm. 848,00
p	$=$	764,48
Hauteur du cylindre d'air $= l - p$	$=$	83,52;
comme la température $t = 24°,2$, cette hauteur $l - p$ est alongée par la dilatation du verre de $(l - p) \times t \times 0,0000087$	$=$	0,018
(1) hauteur $l - p$, le millimètre à zéro étant l'unité,	$=$	83,538

Le diamètre intérieur du tube a été trouvé antérieurement $= 8^{mm},869$, le rayon $r = 4,435$.

Le calcul donne pour le volume du cylindre dont le rayon

(1) Ceci suppose que la hauteur apparente $l - p$ à la température t, a été lue sur le tube lui-même par des divisions tracées à la température de la glace fondante ou par un procédé équivalent.

$r = 4,435$ et la hauteur 83,538, $v = 5162,04$ millimètres cubes, à la température de 24°,2.

Remarquons que le sommet du tube est terminé par une demi-sphère convexe et que le sommet de la colonne de mercure a sensiblement la même forme, de sorte que les deux bases courbes du volume v se compensent mutuellement et qu'on peut les considérer comme planes; la distance $l - p$ est prise entre les sommets des deux demi-sphères.

La hauteur du baromètre 764,48, observée à la température 24°,2 doit être réduite à celle de la glace fondante, pour évaluer sa pression. En supposant $n = 0,0001614$, la colonne réduite est $p = 761,491$. Substituant les valeurs de φ, v, p, que nous venons de déterminer, il vient pour la force élastique de l'air renfermé

$$f = p \frac{\varphi}{v - \varphi} \, 0^{mm},047857,$$

et la vraie hauteur à laquelle le mercure s'élèverait si le tube était parfaitement vide, et que la température fût celle de la glace fondante, serait dans ce cas,

$$P = p + f = 761,491 + 0,048 = 761,539.$$

Je vais examiner maintenant quelle est la limite des erreurs commises, en ne tenant pas compte de l'influence de l'air renfermé sur les hauteurs des colonnes. La dépression que cet air occasionne, est la plus forte lorsque la température est la plus élevée, et lorsque la capacité libre au haut du tube est la plus petite, c'est-à-dire, lorsque le baromètre est le plus haut, car dans ce cas la force élastique f de l'air est au *maximum*. Elle est au *minimum* quand la température est la plus basse et que la colonne barométrique est la moins élevée :

1° La plus grande hauteur barométrique que j'aie observée, est celle du 6 février 1821, elle était de 783,90; et la plus forte température à laquelle le baromètre ait été exposé chez moi

était de 30°; admettons que ces deux circonstances se fussent rencontrées ensemble, nous aurions à substituer dans le terme correctif K, d'abord les valeurs de f, $l-p$, $g-3c$ trouvées plus haut, et constantes pour le baromètre en question, ensuite $p'=783,90$ $l-p'=64,10$, $t=30$, d'où nous obtiendrons K = 0,mm069;

2° La plus petite hauteur à laquelle j'aie vu le baromètre, était de 715,00, le 25 décembre 1821, et la plus basse température à laquelle il ait été exposé chez moi, est de — 5°,0. Admettons encore le concours de ces deux circonstances, leur substitution à p' et à t dans le terme correctif donne K = 0,mm029;

3° Enfin, le relevé de mes registres d'observations météorologiques m'a prouvé que la température moyenne annuelle à laquelle le baromètre est exposé, peut être fixée à + 15°,58; admettons en outre que la hauteur moyenne du baromètre soit de 760,mm00 à cette température, ou 758,mm à 0°, le terme correctif sera K = 0,mm048.

On voit par là, qu'à raison de la petite quantité d'air restée dans la partie supérieure du tube, la colonne, réduite à la température de la glace fondante, est trop petite d'une certaine quantité qui, dans les circonstances moyennes est de 0,mm048; que dans le cas où tout concourt à augmenter cette dépression elle s'élève à 0,mm069; tandis que par la réunion des circonstances qui tendent à l'amoindrir, elle n'est que de 0,mm029. Telles seraient donc les erreurs sur les hauteurs absolues de ce baromètre, en ne tenant pas compte de l'air renfermé; celles sur les hauteurs relatives seraient par rapport aux cas extrêmes de 0,mm040, et par rapport aux circonstances moyennes, elles ne seraient que de la moitié.

L'autre baromètre a fourni sensiblement le même résultat, ce qui prouve que les anomalies qu'ont présentées les différences λ des hauteurs observées simultanément sur les deux baromètres, exposés à des températures égales, ne proviennent pas de la dépression causée par l'air renfermé, dépression à laquelle je n'ai pas eu égard; car j'ai vu ces différences varier de

0,^{mm}250, c'est-à-dire de plus de 5 fois l'erreur que la présence de l'air comporte dans les cas extrêmes, supposés plus haut.

La formule (A) étant exacte quelle que soit la quantité d'air renfermé, elle doit s'appliquer évidemment au *sympiezomètre*, instrument qui sert à indiquer la pression de l'atmosphère à l'aide du volume V qu'occupe une quantité déterminée d'air, sous la pression additionnelle d'une colonne de mercure p', et sous une température t, sachant que sous des circonstances connues cet air occupe un volume V, et qu'alors sa force élastique est f. Mais il faudra avoir l'attention de changer partout le signe de p' dans notre formule, puisque pour le sympiezomètre cette lettre désigne la longueur d'une colonne élevée, dans le tube latéral, au-dessus du niveau du mercure dans le tube à air. Si le sympiezomètre était à volume d'air constant, il faudrait dans notre formule faire en outre

$$\frac{v}{V} = 1, \text{ ou } \frac{l-p}{l-p'} = 1.$$

Sur une méthode générale pour exprimer les trajectoires de la lumière et des planètes, au moyen des coefficiens d'une fonction caractéristique, par W. R. Hamilton, astronome royal d'Irlande. (*Voyez* pag. 69, tom. VIII.)

« Cette autre loi générale, *la loi de l'action variable*, dérive de la loi connue, déjà développée plus haut, lorsque l'on fait varier les points extrêmes de la trajectoire lumineuse : ce qui revient à ne plus supposer que les six fonctions extrêmes (43) s'évanouissent. Dénotons, pour abréger, les trois fonctions finales par ξ, η, ζ, et les trois fonctions initiales par ξ', η', ζ' ;

écrivons de même ν, dV, etc., au lieu des quantités finales $\nu^{(i+1)}$, $dV^{(i+1)}$, etc. et ν', dV', etc., au lieu des quantités initiales $\nu^{(1)}$, $dV^{(1)}$, etc.; nous parviendrons ainsi à la nouvelle équation,

$$\lim. \frac{1}{\varepsilon}\left(V_\varepsilon - V\right) = \Sigma \int \left(\frac{\delta d V_\varepsilon^{(r)}}{\delta \varepsilon}\right)$$

$$= \sigma\xi - \sigma'\xi' + \tau\eta - \tau'\eta' + \nu\zeta - \nu'\zeta' \quad \ldots \quad (60)$$

qui représente mon résultat général. On peut aussi le mettre sous cette forme commode :

$$\delta V = \sigma\delta x - \sigma'\delta x' + \tau\delta y - \tau'\delta y' + \nu\delta z - \nu'\delta z' \quad . \quad (61)$$

» Dans cette équation,

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\delta dV}{\delta dx} = \frac{\delta.\nu ds}{\delta dx}, \\ \tau &= \frac{\delta dV}{\delta dy} = \frac{\delta.\nu ds}{\delta dy}, \\ \nu &= \frac{\delta dV}{\delta dz} = \frac{\delta.\nu ds}{\delta\, dz}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

$$\left.\begin{aligned} -\sigma' &= -\left(\frac{\delta.\nu ds}{\delta dx}\right)' = \frac{\delta d'V}{\delta d'x'}, \\ -\tau' &= -\left(\frac{\delta.\nu ds}{\delta dy}\right)' = \frac{\delta d'V}{\delta d'y'}, \\ -\nu' &= -\left(\frac{\delta.\nu ds}{\delta dz}\right)' = \frac{\delta d'V}{\delta d'z'}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (63)$$

» Les symboles

$$\left(\frac{\delta.d\nu s}{\delta dx}\right)' \text{ etc.,}$$

représentent les quantités initiales qui correspondent à

$$\frac{\delta.\nu ds}{\delta dx}, \text{ etc.;}$$

et $d'V$ désigne, par une notation analogue, le changement infinitésimal de l'intégrale entière V, qui résulte des changemens infinitésimaux $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ des coordonnées initiales, c'est-à-dire d'un mouvement des points initiaux x', y', z', le long de l'élément initial de la trajectoire lumineuse; de sorte que $d'V$ est l'élément initial de l'intégrale prise négativement :

$$d'V = -\nu' \sqrt{d'x'^2 + d'y'^2 + d'z'^2}. \quad . \quad . \quad (64)$$

» Si nous regardons alors l'intégrale ou l'*action* V comme une fonction (que j'ai appelée la *fonction caractéristique*) des six coordonnées extrêmes, et si nous différentions cette fonction par rapport à ces coordonnées, nous voyons que ses six coefficiens différentiels partiels du premier ordre, peuvent être représentés généralement par les équations (26) et (30) que nous avons déjà démontrées pour le cas plus simple des trajectoires rectilignes de la lumière; nous avons vu alors qu'au moyen de ces équations qui équivalent aux formules (17) et (18), l'on pouvait déterminer la marche d'un rayon rectiligne passant dans une direction déterminée par un point initial, ou par un point final donné : il en est de même ici; en général, lorsque l'on connaît les coordonnées initiales, la direction et la couleur d'une trajectoire lumineuse, ainsi que les propriétés optiques du milieu initial, l'on peut déterminer, ou du moins renfermer entre de certaines limites, les valeurs des coefficiens initiaux

$$\frac{\delta d'V}{\delta d'x'}, \quad \frac{\delta d'V}{\delta d'y'}, \quad \frac{\delta d'V}{\delta d'z'},$$

qui forment les seconds membres des équations (30); nous pouvons ainsi regarder comme des quantités connues les premiers membres des mêmes équations, savoir les coefficiens différentiels partiels

$$\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \frac{\delta V}{\delta z'},$$

de la fonction caractéristique V, par rapport aux coordonnées initiales connues : de sorte que si la forme de la fonction V est connue, nous avons entre les coordonnées finales x, y, z, regardées comme variables, les trois équations suivantes

$$\frac{\delta V}{\delta x'} = \text{const.}, \quad \frac{\delta V}{\delta y'} = \text{const.}, \quad \frac{\delta V}{\delta z'} = \text{const.} \quad . \quad (65)$$

qui déterminent la trajectoire, ou du moins sa branche finale.

» Ces trois équations s'accordent ensemble, et n'équivalent qu'à deux relations distinctes entre les coordonnées variables xyz, parce qu'en général V doit satisfaire à une équation différentielle partielle de la forme

$$o = \Omega'(\sigma', \tau', \upsilon', x', y', z'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

dans laquelle, par ce qu'on a vu

$$\sigma' = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \tau' = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \upsilon' = -\frac{\delta V}{\delta z'}, \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

et qui, par suite, est analogue à la seconde formule (20). Cette équation (66), s'obtient par l'élimination des rapports de $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$, entre les formules générales (30). De la même manière les formules (26) donnent en général une équation différentielle partielle de la forme

$$o = \Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, x, y, z\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

qui est analogue à la première des équations (20) et les trois équations suivantes entre les coordonnées initiales et variables $x'y'z'$ d'une trajectoire lumineuse assujettie à passer, avec une direction déterminée, par un point final donné,

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \text{const.}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \text{const.}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Pour ce qui regarde l'intégration et l'usage de ces équations aux différentielles partielles, l'on pourra consulter les volumes déjà mentionnés des *Transactions de l'Académie royale d'Irlande*. »

M. *Hamilton* fait observer que l'application qu'il a faite de la fonction caractéristique V aux problèmes relatifs à la réflexion et à la réfraction de la lumière, repose sur une équation aux différences finies qui, par la nature même de cette fonction V, est évidemment satisfaite; la voici :

$$\Delta V = 0 = \lambda u; \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

Δ se rapporte, comme précédemment, aux changemens subits qui se produisent sur une surface réfléchissante ou dirimante dont l'équation est

$$u = 0; \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

et λ est un multiplicateur indéterminé qui sert à rendre indépendantes les coordonnées du point d'incidence. Ainsi, par exemple, les formules (47), pour un changement subit de direction, résultent immédiatement de l'équation (70), sous la forme

$$\Delta \frac{\delta V}{\delta x} = \lambda \frac{\delta u}{\delta x}, \ \Delta \frac{\delta V}{\delta y} = \lambda \frac{\delta u}{\delta y}, \ \Delta \frac{\delta V}{\delta z} = \lambda \frac{\delta u}{\delta z}, \quad . \quad (72)$$

lorsque l'on différentie cette équation (70), par rapport aux coordonnées du point d'incidence, considérées comme trois variables indépendantes, et que l'on réduit les équations dérivées, au moyen de l'équation (71) de la surface de réflexion ou de réfraction, ordinaire ou extraordinaire.

Ces résultats, relatifs au changement de direction d'une trajectoire lumineuse, peuvent être mis sous la forme

$$\Delta \frac{\frac{\delta V}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta x}} = \Delta \frac{\frac{\delta V}{\delta y}}{\frac{\delta u}{\delta y}} = \Delta \frac{\frac{\delta V}{\delta z}}{\frac{\delta u}{\delta z}}; \quad \ldots \quad (73)$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta V}{\delta y}-\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta V}{\delta x}\right)=o\\ \Delta\left(\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta V}{\delta z}-\frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta V}{\delta y}\right)=o\\ \Delta\left(\frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta V}{\delta x}-\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta V}{\delta z}\right)=o\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(74)$$

en général, un théorème quelconque, relatif aux changemens produits par réflexion ou réfraction, dans les propriétés d'un système optique, peut être exprimé au moyen de la formule (70), comme la *permanence* de certaines autres propriétés. La permanence remarquable, déjà énoncée, des composantes du *retardement normal* de propagation d'une onde lumineuse, me fut suggérée par l'observation que ma fonction V est (dans la *Théorie des ondulations*) le temps que met la lumière à aller du point initial au point final, et que, par conséquent, les ondes (dans la même théorie) sont représentées par l'équation générale

$$V = \text{const.}\quad\ldots\ldots\quad(75)$$

et les composantes du retardement normal par les coefficiens différentiels partiels du premier ordre de V. Les propriétés de la fonction V, qui forme la base de ma méthode optique, m'ont fourni depuis une démonstration assez simple du théorème d'Huygens que j'ai déjà cité et dont on contestait la vérité ; il peut s'énoncer de la manière suivante : les rayons d'un système homogène ordinaire qui, partant d'un même point lumineux ou étant (dans leur état initial et ordinaire) perpendiculaires à une surface commune, ont éprouvé un certain nombre de réflexions ou de réfractions ordinaires, avant d'arriver à leur état final, sont, dans cet état, perpendiculaires à une série de surfaces, savoir : à la série des surfaces (75) qui sont des ondes dans la théorie d'Huygens : parce que, par les propriétés de

ma fonction, l'équation différentielle de cette série est

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

α, β, γ, étant les cosinus qui déterminent la direction finale d'un rayon. Ce fut aussi, en combinant les propriétés de la même fonction caractéristique V avec les principes physiques de *Fresnel*, que je fus conduit (en supposant une indétermination dans deux cas particuliers, dans les relations entre les coefficiens

$$\frac{\delta d\mathrm{V}}{\delta dx}, \frac{\delta d\mathrm{V}}{\delta dy}, \frac{\delta d\mathrm{V}}{\delta dz},$$

et les rapports de dx, dy, dz), à concevoir théoriquement l'existence de deux espèces de *réfractions coniques*, dont je fis part, en octobre 1832, à l'académie royale d'Irlande et au professeur Lloyd, et que ce dernier a vérifiée depuis par l'expérience. M. *Mac Cullagh* m'a informé dernièrement que des considérations géométriques l'avaient conduit, il y a quelques années, à examiner les deux mêmes cas que la théorie de *Fresnel* avait laissés indéterminés, et qu'il s'était proposé de rechercher les conséquences géométriques ou physiques auxquelles ces cas pourraient mener.

Les conséquences auxquelles m'a conduit l'emploi de la fonction caractéristique sont très-nombreuses ; la plupart ont été publiées dans les *Transactions* de l'académie royale d'Irlande; d'autres sont encore inédites. Si je ne me trompe, cette méthode est destinée à influer aussi puissamment sur les progrès de l'optique que la méthode des coordonnées sur ceux de la géométrie analytique. Par l'emploi des coordonnées, *Descartes* réduisit l'étude d'une courbe plane ou d'une surface courbe à celle de la fonction unique qui exprime la loi de l'ordonnée, et prépara ainsi la découverte de formules générales pour représenter les tangentes, les courbures et toutes les autres propriétés géométriques de la courbe ou de la surface qui désor-

mais étaient toutes renfermées dans cette seule loi, dans cette *relation algébrique centrale*. Les géomètres, je l'espère, parviendront, d'une manière analogue, à déduire toutes les propriétés des systèmes optiques, de l'étude de cette relation centrale qui unit, pour chaque système particulier, la fonction optique V aux coordonnées extrêmes et à la couleur, et dont les coefficiens différentiels partiels sont liés aux directions extrêmes d'un rayon, par la loi de l'action variable ou par les formules (26) et (30).

Il ne me reste plus qu'à expliquer en peu de mots comment, ainsi que je l'ai fait pressentir, une fonction et une méthode analogue peuvent, selon moi, faciliter la recherche des orbites des planètes et des comètes, dans le cas où l'on a égard à leurs perturbations réciproques.

L'idée d'une méthode semblable me vint, il y a plusieurs années, et je l'annonçai brièvement dans le 25ᵉ volume (page 80) des *Transactions de l'Académie royale d'Irlande*; mais, jusqu'à ce jour, elle n'avait pas été développée, et ce n'est que dans ces derniers temps que je fus conduit à m'en occuper de nouveau.

Pour commencer par un exemple simple, considérons une comète sans masse sensible et se mouvant dans une parabole continue autour du soleil que nous regarderons comme placé fixement à l'origine des coordonnées, et doué d'une masse attractive égale à l'unité; soit r le rayon vecteur de la comète à l'instant final t, et r' le rayon vecteur de la même comète à l'instant initial t', soit également r'' la corde qui joint les extrémités de r et r', et posons pour abréger

$$V = 2\sqrt{r+r'+r''} \mp 2\sqrt{r+r'-r''}; \quad . \quad . \quad (77)$$

or, je trouve que les composantes initiales et finales de la vitesse de la comète, selon trois demi-axes rectangulaires, peuvent être exprimées de la manière suivante par les coefficiens

de la fonction V,

$$\left.\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}=\frac{\delta V}{dx}; \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\delta V}{\delta y}; \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\delta V}{\delta z}, \\ \frac{dx'}{dt'}=-\frac{\delta V}{\delta x'}; \quad \frac{dy'}{dt'}=-\frac{\delta V}{\delta y'}; \quad \frac{dz'}{dt'}=-\frac{\delta V}{\delta z'},\end{array}\right\} \quad (78)$$

et que cette fonction V satisfait aux deux équations aux différentielles partielles suivantes :

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2=\frac{2}{r}, \\ \left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2=\frac{2}{r'},\end{array}\right\} \quad (79)$$

en vertu desquelles les expressions (78) expriment la loi connue de la vitesse des comètes. Je trouve aussi que toutes les autres propriétés du mouvement parabolique des comètes satisfont aux formules (78) ou y sont renfermées, lorsque la forme (77) est assignée à la fonction V. Elles donnent, par exemple, au moyen d'une combinaison facile, le théorème découvert par *Euler*, et par lequel le temps ($t-t'$) dépend à la fois de la corde parabolique (r'') et de la somme ($r+r'$) des rayons menés à ses extrémités.

Plus généralement, dans un système de points ou de corps qui en attirent ou repoussent un autre, d'après une fonction de la distance, dans le système solaire par exemple, j'ai trouvé que les composantes finales et initiales du *moment*, peuvent être exprimées d'une manière semblable, par les coefficiens différentiels partiels du premier ordre d'une *fonction centrale* ou *caractéristique* V des coordonnées finales et initiales; de

sorte qu'en choisissant V d'une manière convenable, on a en général

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x_1}; \; m_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta y_1}; \; m_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta z_1}; \\ m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x_2}; \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (80)$$

et

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \frac{dx'_1}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta x'_1}; \; m_1 \frac{dy'_1}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta y_1}; \; m_1 \frac{dz'_1}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta z'_1}; \\ m_2 \frac{dx'_2}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta x'_2}, \text{ etc.}; \end{array}\right\} \quad (81)$$

m_1, m_2, etc., désignent les masses du système, et la fonction V doit satisfaire à deux équations aux différentielles partielles du premier ordre et du second degré, qui sont analogues aux équations (79) et peuvent être dénotées comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma. \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right] = 2F, \\ \Sigma. \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2\right] = 2F'; \end{array}\right\} \quad (82)$$

la fonction F renfermant les coordonnées finales et la fonction F′ les coordonnées initiales, et la forme commune de ces deux fonctions dépendant de la loi d'attraction ou de répulsion. Dans le système solaire

$$\left.\begin{array}{l} F = \Sigma \frac{m_i m_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} + H \\ F' = \Sigma \frac{m_i m_k}{\sqrt{(x'_i - x'_k)^2 + (y'_i - y'_k)^2 + (z'_i - z'_k)^2}} + H_1 \end{array}\right\} \quad (83)$$

H étant une constante arbitraire, en général les équations aux différentielles partielles (82) renferment la loi des forces vives, tandis que les autres lois générales ou les intégrales des équations du mouvement, sont exprimées par d'autres propriétés générales et simples de la même fonction caractéristique V, dont les coefficiens combinés avec les relations (80) et (81), suffisent pour déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un système.

La recherche des orbites les plus compliquées, dans l'astronomie lunaire, planétaire et sidérale, est ramenée ainsi à l'étude des propriétés d'une simple fonction V, analogue à ma fonction optique, et représentant l'*action* du système, d'une position à une autre. Si nous connaissions, par exemple, la forme de cette fonction V pour un système de trois corps soumis à la loi d'attraction découverte par *Newton*, (soit le système du soleil, de la terre et de la lune, soit le système du soleil, de Jupiter et de Saturne), nous ne devrions pas recourir à de nouvelles intégrales, pour déterminer les orbites séparées et les configurations de ces trois corps; les huit relations, indépendantes du temps, entre leurs neuf coordonnées variables, seraient données à la fois en différentiant la fonction V, et en employant les neuf équations initiales de la forme (81) qui, en vertu de la seconde équation (82), n'équivalent qu'à huit relations distinctes, lorsque les positions et les vitesses sont données pour une certaine époque initiale; quant au temps variable t, que le système emploierait à passer à l'une quelconque de ses positions subséquentes, on le déterminerait par une simple intégration ou par une combinaison entre les relations précédentes et les équations (80). Le développement de ces vues, y compris leur extension à d'autres questions analogues, me paraît ouvrir, aux recherches de mécanique et d'astronomie, un champ entièrement nouveau.

Je remarquerai, en finissant, que ces vues me furent suggérées par une loi générale d'action variable en dynamique, que j'avais déduite du principe connu de la moindre action

ou de l'*action déterminée*, par un mode de raisonnement de la nature de celui que j'ai appliqué à l'optique, et que j'ai tâché de faire connaître dans ce mémoire.

Observatoire du collége de la Trinité, à Dublin, septembre 1833.

Sur un phénomène de couleurs accidentelles, par M. Plateau.

Lorsqu'on a regardé fixement, pendant quelque temps, un petit objet coloré posé sur un fond blanc ou noir, et qu'on jette subitement les yeux sur une surface blanche, on voit bientôt paraître, comme on sait, une image de même forme que l'objet, mais d'une couleur complémentaire. Ainsi, la contemplation prolongée d'un objet *rouge* donne ensuite naissance à l'apparition d'une image *verte*, etc. Ces apparences colorées, auxquelles on a donné le nom de *couleurs accidentelles*, offrent une particularité remarquable observée par la plupart des physiciens qui se sont occupés de ce genre de recherches, et qu'il est très-aisé de constater. Elle consiste en ce que l'*image accidentelle*, au lieu de s'effacer graduellement d'une manière continue, présente ordinairement une suite de disparitions et de réapparitions alternatives, l'image devenant de plus en plus faible à chaque réapparition, jusqu'à ce qu'on n'aperçoive plus rien. Je ne m'occuperai pas ici de la cause à laquelle il faut attribuér ce phénomène (1), et je le considérerai simplement comme un fait susceptible de mesure. L'objet de cette notice est d'exposer les résultats de quelques observations que M. *Quetelet* a bien voulu faire avec moi sur ces apparences singulières, résultats qui m'ont paru mériter quelqu'attention.

---

(1) J'ai essayé de présenter une théorie nouvelle de tous les phénomènes qui se rattachent aux couleurs accidentelles, dans un mémoire dont la première partie paraîtra dans le 8e vol. des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*.



L'impression accidentelle présentant, dans chacune de ses réapparitions, un *maximum* d'intensité que l'on peut saisir avec une certaine précision, nous avons cherché à mesurer les intervalles de temps écoulés depuis l'instant où l'observateur cessait de regarder l'objet coloré, jusqu'à ceux où l'impression accidentelle atteignait ses *maxima* successifs.

Nous opérions de la manière suivante : L'un de nous regardait fixement, pendant un nombre déterminé de secondes, un morceau de papier *orangé* placé sur un fond noir, dans un lieu bien éclairé, puis portait aussitôt les yeux sur un mur blanc. Alors il indiquait, avec le plus de précision possible, les instans où l'impression accidentelle *bleue* qu'il apercevait, atteignait ses *maxima* successifs, tandis que l'autre observateur muni d'une montre marquant les demi-secondes, notait aussitôt le temps.

Nous avons obtenu, de cette manière, les résultats suivans. Ils expriment les temps écoulés depuis l'instant où l'observateur cessait de regarder le papier orangé jusqu'aux instans successifs des *maxima*.

1° Après avoir regardé le papier orangé pendant 15″ :

Effet observé par M. Quetelet.	Effet observé par moi.
2″,5	3″,0
8″,9	8″,5
15″,1	16″,8
23″,7	23″,5

2° Après avoir regardé le papier orangé pendant 30″ :

Effet observé par M. Quetelet.
2″,5
8″,2
16″,4
25″,4
35″,1
45″,1
55″,1

3° Après avoir regardé le papier orangé pendant 60″ ;

Effet observé par M. Quetelet.	Effet observé par moi.
2″,5	2″,7
7″,8	7″,0
	11″,0
14″,4	15″,0
	19″,0
24″,7	23″,0
	28″,0
34″,0	34″,5
45″,6	48″,0
52″,6	54″,0
67″,9	65″,5
76″,6	
84″,3	

Ces résultats sont en trop petit nombre pour que l'on puisse en tirer des conclusions bien certaines ; leur comparaison me paraît cependant autoriser les remarques suivantes :

1° Si l'on compare les trois observations faites par M. *Quetelet*, et qui représentent d'abord les effets produits après avoir regardé l'objet coloré pendant 15″, puis après l'avoir regardé pendant 30″, puis pendant 60″, on verra, comme on pouvait s'y attendre, que le nombre des apparitions de l'image accidentelle est d'autant plus grand que l'on a regardé l'objet coloré pendant un temps plus long. Ainsi, dans le premier cas, il y a eu quatre apparitions ; dans le second, il y en a eu sept, et dans le troisième dix. Les observations faites par moi conduisent à un résultat analogue : j'ai observé quatre apparitions, dans le premier cas ; et onze, dans le dernier.

2° La comparaison des trois observations de M. *Quetelet* semble conduire à une conclusion plus remarquable : c'est que, si le temps pendant lequel on a regardé l'objet coloré a de l'influence sur le nombre des apparitions de l'image accidentelle,

il ne paraît pas en avoir sensiblement sur les époques de l'arrivée des *maxima ;* ainsi le premier *maximum* s'est montré, dans les trois cas, après 2″,5, et les temps après lesquels se sont montrés les autres offrent des différences assez petites pour qu'elles puissent être attribuées aux erreurs des observations.

3° Si l'on compare les deux premières observations, l'une de M. *Quetelet* et l'autre de moi, on voit que dans cette expérience où nous avions tous deux regardé l'objet coloré pendant 15″, les apparitions se sont produites en même nombre dans les yeux de chacun de nous, et ont atteint leurs *maxima* sensiblement aux mêmes époques. On peut donc soupçonner, d'après cela, que ces phénomènes se produisent d'une manière à peu près identique, au moins quant à leur durée, dans les différents yeux. Cependant, en comparant de même les deux dernières observations, on voit que, si on les écrivait l'une à côté de l'autre de manière que les premier, second, troisième, etc. *maxima* observés par M. *Quetelet*, correspondissent aux premier, second, troisième, etc. *maxima* observés par moi, on trouverait, dans l'une et l'autre série, des nombres extrêmement différents ; ainsi le cinquième *maximum* de la série de M. *Quetelet* n'a lieu qu'après 34″, tandis que le cinquième *maximum* de la mienne a lieu après 19″. Mais en écrivant les deux séries comme je l'ai fait ci-dessus, on voit que leur accord est au contraire bien probable, et qu'il semble seulement qu'entre des apparitions distribuées comme celles qui se produisaient dans les yeux de M. *Quetelet*, s'intercalaient, chez moi, de petites apparitions accessoires qui étaient peut-être le résultat d'une plus grande sensibilité de mes yeux.

Je me propose, du reste, de revenir sur ce sujet intéressant, et d'entreprendre, à cet égard, des observations suivies.

Bruxelles, le 27 avril 1834.

Expériences sur la vision.

Mme *Mary Griffiths* a inséré dans le *Philosophical magazine*, pour janvier 1834, le résultat d'une observation curieuse sur la vision. Il résulte de cette observation que, quand après avoir reposé dans une chambre obscure, les yeux viennent à être frappés subitement d'une lumière assez vive qui pénètre à travers les paupières, on aperçoit sur un fond jaunâtre une série de raies d'un rouge brique qui se croissent à angles droit, à peu près comme les mailles d'un filet. Bientôt après, ce sont les raies qui prennent la teinte jaunâtre et le fond devient rouge brique. Ce phénomène demande à être vu le matin, au moment du réveil, et quand on vient à ouvrir les volets d'une chambre obscure, avant que les yeux aient été ouverts; j'ai néanmoins réussi à observer le phénomène sans ces précautions; j'ai vu les carrés se former dans une chambre où la lumière pénétrait librement; je les ai vus même se reproduire deux à trois fois de suite, en laissant des intermittences entre elles. Mme *Griffiths* dit que les apparences changent selon l'état de santé, la quantité de lumière qui pénètre à travers les paupières et l'instant du jour où se fait l'observation. A la suite d'un sommeil après le dîner, l'auteur n'a point vu les raies, mais les carrés ou interstices qu'elles séparent, d'abord obscurs, puis légèrement colorés. Au centre de chaque carré, on voit souvent comme une étoile brillante, sur un fond jaune; quand la couleur du fond change, cette étoile disparaît. Une légère pression sur les yeux déforme les lignes de séparation des carrés, et leur donne un mouvement ondulatoire. Mme *Griffiths* croit pouvoir conclure de cette expérience que le *siége de la vision n'existe pas du tout dans l'œil;* elle pense que les lignes observées proviennent de la conformation de la rétine. L'expérience de Mme *Griffiths* ne semble avoir aucun rapport avec celle de M. *Purkenje*, par laquelle on voit les ramifications des vaisseaux sanguins qui sont devant la rétine; elle ne paraît même se rapporter à aucune observation connue sur la

structure de l'œil; excepté peut-être à celle que j'ai indiquée moi-même (1), et qui fait voir, quand on exerce symétriquement la même pression sur les deux yeux, une série d'apparences qui se reproduisent *toujours les mêmes et dans le même ordre*. On voit alors, non pas des carrés, mais des lozanges distribués sur des lignes courbes à peu près comme ceux que voit se former Mme *Griffiths*, quand elle comprime un peu les yeux. L'expérience que j'ai fait connaître se rapporte aussi à celle de M. *Purkenje*, en ce que le *foramen centrale* paraît être justement le centre de symétrie des apparences que j'observe; et c'est une remarque qui a été faite aussi, depuis peu, dans le *Philosophical magazine*, pour le mois de mai 1834.

A. Q.

ERRATUM.

Dans le tom. VII de la *Correspondance mathématique*, pag. 232, il s'est glissé une erreur dans les élémens de l'observation relatifs au passage de Mercure, par suite d'une omission dans l'indication de l'espèce du temps; je ne me suis aperçu de cette omission qu'en recevant le tom. VI des mémoires de la *Société royale astronomique de Londres*, où elle se trouve reproduite. Je me fais un devoir de la rectifier ici.

	AU LIEU DE	LISEZ
Passage de Mercure	11h. 59′55″,2 t. m.	11h. 59′55″,2 t. v.
Contact intérieur à la sortie. .	4h. 2 52	4 2 52 t. m.
Contact extérieur	4 6 1	4 6 1 »

---

(1) *Bulletin de l'Acad. de Bruxelles*, 7 décembre 1833; *Annales de physique et de chimie*, décembre 1833, et *Annales de Poggendorf*, no 31, tom. XXXI, 1834.

Lettre de M. le professeur RUDBERG, d'Upsal, au rédacteur *sur le magnétisme terrestre et l'optique.*

...... Je me hâte de vous communiquer le peu que j'ai pu faire dans l'intérêt du magnétisme terrestre.

Quant à votre remarque que l'inclinaison soit l'élément dont l'exacte détermination laisse encore le plus à désirer, je suis jusqu'à un certain point de votre avis; cependant je crois avoir trouvé, par les nombreuses observations que j'ai eu occasion de faire ici, à Stockholm et à Paris, qu'avec une bonne boussole et des précautions nécessaires, l'incertitude ne doit jamais excéder deux minutes, vu la variation journalière (1). Parmi ces précautions, il y en a deux qui m'ont paru très-essentielles. La première l'est au moins pour une de mes aiguilles, dans laquelle le centre de gravité n'est pas si près de l'axe de rotation que dans l'autre; elle consiste à aimanter l'aiguille dans le sens contraire, avant de commencer les observations et puis à renverser les pôles avec le même nombre de frictions, pour qu'elle ait aussi près que possible le même degré d'intensité dans les deux cas. L'autre est de laisser, à chaque observation, l'aiguille descendre très-doucement sur les panneaux pour qu'elle ne glisse pas (2).

Voici les résultats des observations faites à *Stockholm* :

1832.	INCL. ABSOLUE.	AVEC L'AIG.
Le 1er août entre 4 h. 30′ et 8 h. après midi.	71°38′,0	n° 2.
2 id. entre 11 h. av. m. et 4 h. après midi.	71°40′,5	n° 1.
12 id. entre 11 h. av. m. et 2 h. 1/2 apr. m.	71°40′,0	n° 2.

où il faut remarquer que la première observation tombe vers la fin du jour, et devait par conséquent donner moins.

(1) Mes remarques portaient plutôt sur les observations que nous avons, que sur l'exactitude de celles que l'on peut faire. A. Q.

(2) Ces deux précautions à prendre ne m'ont point échappé dans le cours

			INCL. ABSOLUE.	AVEC L'AIG.
1832 le	24 décemb.	entre 1 h. et 4 h. apr. midi.	71°40',5	n° 2.
	26 id.	entre 10 h. av. m. et 2 h. 30' ap. m.	71°41',7	n° 1.
1833 le	22 mars	entre midi 30' et 2 h. 30' apr. m.	71°41',88	n° 2.
	Idem.	entre 3 h. et 5 h. apr. m.	71°41',44	n° 1.

Voici encore les observations faites ici, à *Upsal*, dans ces jours-ci :

1834.	INCL. ABSOLUE.	AVEC L'AIG.
Le 19 juin entre 2 h. 15' et 5 h. 30'	71°42',4	n° 1.
Idem. entre 6 h. et 9 après midi.	71°40',8	n° 2.
Le 26 juin entre 10 h. 45' et 1 h. 20'	71°43',0	n° 2.
Idem. entre 2 h. 15' et 5 h. après midi.	71°41',8	n° 2.

La première observation avec l'aiguille, qui donne moins que les deux suivantes, fut encore faite le soir.

Les résultats moyens deviennent :

A *Stockholm*, 1832,	dans le mois	d'août.	71°39',5
» »	»	de décembre. . .	71° 41',1
1833,	»	de mars	71° 41',7
Et à *Upsal*, 1834,	»	de juin	71° 42',25

d'où il paraît que l'inclinaison est à *Upsal* un peu plus grande qu'à *Stockholm*. Au reste, les différences ne montent dans aucune des séries à 2 minutes, si l'on fait attention à l'époque du jour à laquelle ces observations furent faites. Cependant je pense qu'en partie au moins, l'exactitude du résultat dépend de la forme plus ou moins parfaitement cylindrique des tourillons, et je ne doute pas qu'il ne soit avantageux d'employer pour cette raison une méthode que j'ai proposée et employée, savoir ; de faire les observations non-seulement dans le méri-

---

de mes observations sur le magnétisme terrestre. On pourra voir dans le volume des *Annales de l'observatoire de Bruxelles*, qui vient de paraître, que j'insiste particulièrement sur celle qui est relative au renversement des pôles. J'ai même entrepris, dans la vue d'éclaircir cette difficulté, un travail sur l'aimantation, qui a paru dans les *Annales de physique et de chimie* de France, juillet 1833, et dont j'ai donné un extrait pages 95 et suivantes de ce volume. A. Q.

dien même, mais encore dans des azimuts quelconques hors du méridien (qui ne doivent cependant pas excéder 30°); parce que de cette manière l'aiguille va se reposer sur différentes parties de la circonférence du tourillon. Soient i', i'', etc., les inclinaisons observées (comme à l'ordinaire à l'ouest et l'est avant et après le renversement des pôles) dans les azimuts magnétiques α', α'', etc. L'inclinaison absolue, calculée d'après l'ensemble des observations et d'après la méthode des moindres carrés va être

$$\cot. I = \frac{\Sigma(\cot. i \cos. \alpha)}{\Sigma(\cos.^2\alpha)}.$$

Si en même temps on tenait compte de la variation, je suis persuadé qu'on serait sûr d'une minute, ce qui, par exemple, pour l'aiguille n° 2, dont je me sers pour déterminer l'intensité et dont la durée de 300 oscillations à + 15°, était à Stockholm = 1296″,5, ne produirait pas une incertitude plus grande que 0,0009 dans l'intensité totale. Quant à l'inclinaison à Berlin, la détermination de M. *Riess*, qui l'avait trouvée = 68° 24′ au mois de décembre 1831, est évidemment trop grande, de même que celle de M. *Erman* qui, dans le mois de mai 1831, l'avait obtenue = 68° 14′ est un peu trop petite, parce que la moyenne de quatre déterminations que je faisais à Berlin à la fin du mois de mai 1832, donne 68° 16′2 (1).

Les observations les plus anciennes que nous ayons à *Upsal* sur la valeur de l'inclinaison, datent du 19 août 1743, entre 10 h. et midi, et furent faites par *And. Celsius*. Il trouva, par des moyens qui ne donnent pas une grande précision, l'inclinaison = 74° 51′, et encore le 20 septembre de la même année l'inclinaison = 75° 5′ : ainsi en prenant la moyenne, à peu près = 75°, dont l'incertitude cependant peut être même de plus de 30′. Cela

(1) Ces résultats viennent à l'appui des remarques que j'ai faites sur le peu de précision que comportent généralement les observations magnétiques. Nous ignorons encore les valeurs précises de plusieurs corrections très-importantes. A. Q.

donne une *variation annuelle moyenne à Upsal* = 2′ 16″. A Stockholm l'inclinaison fut trouvée par *Wilcke*, l'année 1768, = 75°. Probablement cette valeur est trop grande, si celle que trouva *Celsius* 25 ans auparavant, n'est pas trop petite. L'observation de *Wilcke*, comparée à la mienne, donnerait la *variation annuelle moyenne à Stockholm* = 3′ 8″, ce qui n'est pas d'accord avec celle obtenue à *Upsal*, quoique d'ailleurs peu différente de ce qu'on a reconnu dans les autres endroits. Le plus vraisemblable est cependant que les observations de *Celsius* et de *Wilcke* sont très-erronées toutes les deux.

Les déterminations de la déclinaison absolue faites à Stockholm avec la grande boussole de M. *Gambey* dans l'observatoire magnétique, que l'Académie des sciences a bien voulu, à ma prière, faire construire au nord de l'observatoire astronomique, sont les suivantes :

1833, le	2 janvier entre	2 h. 19′ et	4 h. 16′	après-midi	14° 56′ 29″
»	le 3 »	11 h. 56′ et	1 h. 33′,5	»	15° 0′ 37″
»	le 8 »	3 h. 1′ et	4 h. 38′	»	14° 55′ 53″
»	le 26 mars entre	midi 29′ et	2 h. 45″	»	14° 58′ 9″
»	le 28 »	9 h.	et 11 h. 50′	»	14° 54′ 16″

La boussole de variation fut observée en même temps, de cinq en cinq minutes ; ainsi on pourrait, au moyen de cela, calculer la valeur pour une certaine heure du jour.

Après mon retour de Stockholm, j'ai encore déterminé, il y a quelques jours, la déclinaison à Upsal, et j'ai trouvé

1834, le 22 juin, entre	8 h. 8′ et	10 h. 15′	avant midi	14° 30′ 10″
» » »	11 h. 35′ et	1 h. 14′	après midi	14° 38′ 7″
» » »	8 h. 7′ et	9 h. 38′	»	14° 34′ 28″
» le 23 juin »	7 h. 16′ et	9 h. 20′	avant midi	14° 26′ 50″

D'où il suit que la déclinaison est *environ* 20 ′*moindre à Upsal qu'à Stockholm.*

La plus ancienne observation sur la déclinaison à Upsal que j'aie pu trouver est celle de *A. Celsius*, le 28 juillet 1740, entre 3 et 4 heures après-midi ; elle donna 8° 50′ ouest, et la plus ancienne à Stockholm est celle de *Wilcke* et *Wargentin*, le 18 mai 1763. Elle fut trouvée = 11° 50′, et par *Wilcke*, le

23 juin 1777, = 13° 42′. En regardant le *Journal de l'observatoire à Stockholm*, on voit que la déclinaison doit avoir atteint son *maximum* en 1791 et 1792, savoir : 16° 23′ (1), depuis, elle diminue continuellement avec des irrégularités qui tiennent évidemment à ce qu'on n'a eu qu'une aiguille posée sur un pivot.

Pendant les observations que nous avons faites durant mon séjour, en 1832 et 1833, à Stockholm, moi et MM. *Cronstrand*, *Haggbladh* et d'autres, sur la variation de la déclinaison aux époques fixées par M. *de Humboldt*, il se présentait quelquefois, la nuit, des aurores boréales; et nous avons toujours trouvé qu'elles *diminuaient* la déclinaison; elles n'étaient pas, au reste, assez bien déterminées pour qu'on pût en conclure l'azimut et la hauteur.

Craignant de vous avoir trop entretenu de mes observations sur le magnétisme, je vais vous communiquer quelques résultats des recherches optiques que j'avais entreprises l'année passée. La première concerne la double réfraction dans l'apophyllite, dont je m'étais procuré un bien beau cristal de l'île Uton. Comme vous vous le rappelez, M. *Herschel* avait reconnu, au moyen des anneaux se formant autour de l'axe de cristallisation, que l'apophyllite, quoique doublement réfringent pour les rayons externes du spectre, ne jouissait que de la simple réfraction pour les rayons jaunes. Il se plaint de ne pas avoir pu se procurer un prisme; mais j'y ai réussi en mettant le morceau d'apophyllite entre deux plaques de verre et en faisant tailler le tout ensemble. Les expériences ont donné *le résultat définitif :* QUE TOUS LES RAYONS SUBISSAIENT UNE RÉFRACTION DOUBLE dans le prisme dont je me suis servi. Je dois ici faire remarquer qu'il y a deux espèces d'apophyllite à Uton, savoir : une qui donne la croix noire avec les anneaux colorés, comme à l'ordinaire, dans le spath calcaire, etc., et une autre qui donne la croix

---

(1) Chose assez singulière, si toutefois elle ne se laisse pas expliquer par des fautes d'observation, parce que, dans le reste de l'Europe, la déclinaison a commencé à diminuer beaucoup plus tard. Prof. R.

noire avec des anneaux, mais qui ne sont colorés qu'en olive et en violet-bleuâtre. Le prisme fut taillé dans un cristal appartenant à cette *dernière* espèce. Ainsi, il est bien possible qu'il y ait d'autres espèces d'apophyllite dans lesquelles les rayons jaunes ne deviennent que simplement réfractés, comme le prouve au reste l'observation de M. *Herschel*. La chose m'a paru assez remarquable, parce qu'elle ajoute encore aux bizarres propriétés optiques qu'on trouve dans l'apophyllite.

La seconde recherche regardait la question, si les raies noires de *Fraunhofer* dans les spectres, proviennent de l'absorption ou non dans les milieux par lesquels la lumière passe. L'appareil qui m'a servi était le même que celui que j'employais dans mes autres expériences sur la réfraction. La seule différence était que devant l'ouverture de l'héliostat fut placé un tube en laiton, dans lequel pouvait glisser un autre tube cylindrique. Ces deux tubes étaient fermés à l'une de leurs extrémités, chacun par un verre à surfaces planes et parallèles. Quand un tube était rentré dans l'autre, comme dans les lunettes astronomiques, les deux verres étaient peu distans l'un de l'autre et laissaient un espace qui communiquait avec un tube vertical en verre que je remplissais avec un liquide coloré. En faisant marcher le cylindre mobile je pouvais rendre la colonne liquide plus ou moins longue, et par conséquent plus ou moins absorbante. La lumière, avant de venir au prisme, était ainsi obligée de passer par cette colonne, où les rayons différemment colorés subissaient une diminution plus ou moins forte en intensité. J'ai essayé un grand nombre de liquides de différentes couleurs, et j'ai toujours trouvé *que les raies noires demeuraient au même endroit dans chaque couleur du spectre, jusqu'à l'anéantissement de la couleur, et qu'il ne se formait pas du tout d'autres raies*. D'où il suit que le pouvoir absorbant des liquides colorés n'a aucune influence sur l'existence et sur la configuration des raies noires du spectre. La chose n'est pas peut-être la même pour les gaz. Je vais m'en occuper cet été.

Upsal, 29 juin 1834.

Sur l'origine de la chaleur animale, note communiquée par Charles Matteucci de Forli.

La cause de la chaleur animale a été comme tout autre phénomène vital, l'objet d'un très-grand nombre de recherches, et quoique heureusement elle soit entrée la première de tous les faits physiologiques dans le domaine naturel des sciences physiques et chimiques, il faut avouer que nous avons encore à désirer des connaissances plus précises.

Il était tout simple pour *Lavoisier* et *Laplace*, de rapporter la source de cette chaleur indépendante de la température extérieure à l'action de la respiration, qui, selon eux, n'était que la conversion du charbon et de l'hydrogène du sang en acide carbonique et en eau, et devait pendant cette combustion développer de la chaleur. Cette explication qui, du reste, se présente d'une manière très-séduisante, n'a pu se soutenir en face des graves objections qu'on lui a opposées. On sait, en effet, d'après les expériences de *MM. Dulong* et *Despretz* que la chaleur dégagée par le charbon et l'hydrogène pendant leur combustion, ne correspond pas à plus de 0,752080 de la chaleur que les animaux, soit herbivores soit carnivores, perdent dans le même temps. Il faut donc qu'il y ait une autre source de chaleur dans le corps, et si cette source existe, c'est bien d'elle que doit dériver toute la chaleur animale. Nous savons aussi, par les expériences d'*Edwards* qu'il n'y a pas de combustion dans les poumons, mais seulement une absorption d'oxigène et une exhalaison d'acide carbonique. Enfin, l'on conçoit très-aisément que la température des poumons n'étant pas sensiblement plus élevée que celle des autres parties extérieures du corps, le foyer de la chaleur animale ne peut y exister.

A défaut de cette explication, on a eu recours au système nerveux, planche de salut dans tout orage physiologique. *Brodie*, le premier, a fait voir qu'après avoir coupé la tête à

un animal, on peut encore entretenir chez lui la respiration et la circulation du sang dans les artères ; cependant, selon lui, cet animal se refroidit plus promptement qu'un autre dont la respiration n'a pas été entretenue artificiellement, parce que l'air qui entre froid dans ses poumons et en sort chaud, lui ôte de sa chaleur. La respiration n'est donc pas, a dit *Brodie*, la cause de la chaleur animale, mais elle réside dans le système nerveux. *Legallois* objecta qu'après la section des nerfs de la huitième paire, les poumons s'engorgent de sang et la respiration est genée ; d'après lui, il y a réfroidissement toutes les fois que la respiration ne s'opère pas complètement. *Chossat* a fait voir que certaines lésions mortelles du cerveau, malgré lesquelles la respiration et la circulation ne cessent de s'accomplir, sont accompagnées d'un réfroidissement proportionnel à celui qu'éprouve un animal dont on a coupé la tête, et chez lequel on a entretenu la respiration artificiellement. *Chossat* trouva que le refroidissement était une suite de la section ou de la lésion des nerfs de la huitième paire. Enfin M. *De la Rive* a vu dans le dégagement de la chaleur par le système nerveux, un phénomène analogue à l'échauffement des fils qui transportent le courant électrique.

Il faut avouer cependant qu'aucune expérience n'est assez concluante en faveur de cette hypothèse, et le seul fait d'animaux doués d'un système nerveux et qui ne jouissent d'aucune calorification est une objection grave. La seule différence entre ces animaux consistant dans la présence des ganglions, Sir *Everard Home* fut conduit à soupçonner que la calorification dépendait des ganglions qui sont pourvus de nerfs; il coupa tous les troncs nerveux qui se rendent à la membrane velue de l'un des bois du Daim, et laissa intacts ceux du bois opposé ; il vit dans ce cas la température se maintenir pendant dix jours en dessous de celle du bois dont les nerfs étaient restés intacts. Voilà toutes les expériences qu'on peut recueillir en faveur de cette hypothèse, et je ferai observer d'abord qu'on se trompe étrangement lorsque l'on avance que le siége de la chaleur doit exister dans les nerfs, par cela seul que toute lésion nerveuse

est accompagnée d'un refroidissement. Tous les systèmes organiques et leurs fonctions sont tellement liées entre eux dans la vie, qu'on ne peut toucher à l'un d'eux sans que les autres ne s'en ressentent : et cela doit se vérifier surtout pour le système nerveux dont la généralité d'action est clairement démontrée. Nous savons en effet qu'il est impossible de couper les nerfs de la huitième paire sans que la respiration, la digestion, les sécrétions, la nutrition ne cessent entièrement. On voit d'abord que si l'origine de la chaleur animale réside dans l'action du cerveau, de la moëlle épinière, des ganglions, des nerfs, ces organes doivent en être le siége. J'ai donc examiné avec tous les soins possibles la chaleur de ces parties, surtout des pneumogastriques et il m'a été impossible d'apercevoir la plus petite différence entre leur température et celle du reste de l'animal. Il est à remarquer aussi que le courant électrique du corps, s'il en existait un (ce qui n'est démontré par aucun fait), devrait être d'une grande force, pour que l'on pût expliquer la chaleur animale comme l'échauffement des fils métalliques par lesquels l'électricité se décharge. Les fièvres qui sont précédées d'un refroidissement général sensible au thermomètre, fournissent encore une objection très-grande contre cette opinion, puisque l'on voit dans ce cas la circulation s'affaiblir, tandis que l'action du système nerveux est plus forte qu'à l'ordinaire, comme le montrent les convulsions du malade. Je vais décrire maintenant les expériences que j'ai entreprises pour découvrir la véritable origine de cette chaleur. En examinant d'avance la température des muscles de la cuisse d'un lapin, à l'aide d'un thermomètre à boule très-petit introduit dans les intégumens, je l'ai trouvée de + 36°,3, celle de l'air étant + 17°. La circulation sanguine a été complétement détruite dans ce membre, par la ligature des veines et des artères : les nerfs crural et sciatique ont été laissés intacts. Le thermomètre plongé dans la substance musculaire a commencé à baisser et dans l'espace d'une demi heure est descendu à + 25°. J'ai fait alors traverser le membre par un courant électrique, dans différentes directions et à chaque fois j'ai observé des contractions musculaires ; ce-

pendant la température a continué à descendre, plus lentement à la vérité et a fini par ne plus excéder que d'un degré la température extérieure. J'ai tenté l'expérience inverse sur un autre lapin : j'ai coupé le gros nerf sciatique et le nerf crural en laissant cette fois la circulation intacte. Après quinze minutes, le thermomètre n'avait pas changé, puis il baissa d'un degré et il s'arrêta en ce point; j'attendis assez long-temps et je détruisis enfin la circulation; aussitôt la température diminua comme dans l'expérience précédente. Il est donc permis de conclure, 1° que la chaleur animale n'a pas un siége particulier dans le corps, mais qu'elle se développe partout au même degré; 2° que la circulation sanguine est essentiellement nécessaire pour le développement et le maintien de cette chaleur; 3° que le système nerveux ne lui donne point naissance et n'influe sur elle qu'en tant qu'il modifie les autres fonctions auxquelles elle est due.

La nouvelle cause à laquelle je crois devoir rapporter la chaleur animale, me paraît si simple et si naturelle que je m'étonne qu'elle n'ait pas encore fixé l'attention des physiologistes. Les expériences de M. *Pouillet* sur le dégagement de chaleur qui a lieu lorsqu'un liquide mouille un solide m'ont servi de point de départ. Il fallait cependant étendre ces expériences et les essayer sur un grand nombre de tissus organiques. Faute d'un thermomètre assez sensible, je n'ai pu tenter que des expériences de comparaison. J'ai pris du foie, des poumons, des muscles, je les ai desséchés dans le vide; après un intervalle de trois jours, je les ai broyés et desséchés de nouveau. Une boule de thermomètre couverte de cette poussière et mouillée avec de l'eau, s'est échauffée de deux degrés; on conçoit que s'il eut été possible de mesurer le dégagement de chaleur, j'aurais observé un échauffement très-fort, puisque je n'ai rien obtenu à l'aide du même instrument en faisant usage de tendons de bœuf, de membranes très-minces et qui ont donné à M. *Pouillet* jusqu'à + 9°,63. Si maintenant l'on réfléchit à la nature physique de tous nos tissus, au réseau extrêmement délié qui compose toutes nos membranes et au nombre infini des vaisseaux très-fins qui y

aboutissent, on verra très-aisément les conditions des expériences de M. *Pouillet* vérifiées à un degré éminent dans toutes les parties du corps. L'acte de la nutrition étendu à toutes les molécules organiques, consistant toujours dans l'absorption de molécules assimilables, et dans l'éjection d'autres molécules déjà assimilées, ne doit-il pas être une source constante de chaleur ? qu'on ajoute à cela qu'indépendamment du phénomène physique, que je viens d'examiner, il se passe encore une action chimique, puisque la composition et les propriétés des parties animales varient sans cesse ; et il sera aisé de concevoir l'influence du système nerveux sur la chaleur animale, puisque c'est lui qui donne naissance aux actions chimiques, aux mouvemens, aux absorptions. Néanmoins on peut voir que, même en *détruisant* en partie cette action nerveuse, pourvu qu'on laisse la circulation intacte, le phénomène de la nutrition ne pourra se détruire qu'à la longue : d'une autre part, bien que l'action nerveuse soit d'une certaine manière exaltée, il peut y avoir refroidissement, si la circulation est ralentie. C'est enfin à l'engorgement sanguin, aux décompositions des tissus dont une partie enflammée est le siége, qu'est due sa grande chaleur.

L'acte de la nutrition composé d'une action chimique et d'une action physique, soumises comme toute autre fonction à l'influence nerveuse, est donc la véritable cause de la chaleur animale.

Forli (États-Romains), 1er juin 1834.

Lettre de M. le baron DE PRONY à M. VERHULST, *sur la table des populations spécifiques*, insérée dans l'Annuaire du bureau des Longitudes, pour 1833 (1).

Votre travail important sur la table des *Populations spéci-*

(1) M. *Verhulst* a bien voulu nous communiquer cette lettre que liront sans doute avec intérêt les amis des sciences qui s'occupent du mouvement des populations.



fiques des Départemens français a été, pour moi, l'objet d'examens et de vérifications dont je vais vous faire connaître les résultats.

Cette table contient deux colonnes de nombres calculés d'après deux séries de données, dont une seule extraite de l'*Annuaire* de 1833, est connue, c'est celle des populations; l'autre série, celle des surfaces des départemens, n'est pas encore publiée. Il était naturel, pour suppléer cette lacune, de combiner les nombres de la table des populations absolues, avec les nombres correspondans de la table des populations spécifiques; mais cette marche *inverse* ne reproduit pas exactement les mombres cherchés; en effet, désignant la population absolue d'un département par Π, sa surface vraie par S, le nombre correspondant π de la table qui représente le rapport $\frac{\Pi}{S}$, ne l'énonce qu'approximativement, les nombres Π et S n'étant pas, en général, exactement divisibles l'un par l'autre. J'ai donné π avec trois décimales et j'aurais pu en supprimer une, et même deux, sans diminuer l'utilité statistique de la table.

L'équation

$$\frac{\Pi}{S}=\pi, \text{ ou } S=\frac{\Pi}{\pi},$$

posée entre les nombres absolus Π et S, *donnés par le fait*, et le nombre π évalué par approximation, n'est donc pas une équation rigoureusement exacte; il faut écrire

$$\frac{\Pi}{S}=\pi\pm\varepsilon, \text{ ou } S=\frac{\Pi}{\pi\pm\varepsilon},$$

en désignant par ε la petite fraction décimale qui est ou ajoutée, ou négligée dans le calcul de $\frac{\Pi}{S}$, et il faudra poser $S'=\frac{\Pi}{\pi}$

pour distinguer cette valeur approchée de la valeur exacte

$$S = \frac{\Pi}{\pi \pm \varepsilon}.$$

La différence entre les deux valeurs sera

$$\pm S' \mp S = \frac{\Pi}{\pi} - \frac{\Pi}{\pi \pm \varepsilon},$$

et posant $\pm S' \mp S = E$, le rapport de E à ε prendra la forme très-simple

$$\frac{E}{\pm \varepsilon} = \frac{S}{\pi}.$$

Le nombre S étant, en général, très-grand par rapport à π, le nombre E sera aussi très-grand par rapport à ε, en sorte qu'une petite fraction, en plus ou en moins, dans la valeur approchée de π, entraîne une différence notable entre la valeur effective de S donnée par les opérations géodésiques, et celle qu'on déduit de l'équation

$$S' = \frac{\Pi}{\pi}.$$

J'ai dressé un tableau des différences entre les valeurs de S′ que vous avez calculées d'après les nombres de l'*Annuaire*, et les valeurs de S′ données par des opérations faites, sous ma direction, au bureau général du cadastre; sur les 86 départemens, 82 doivent être considérés comme offrant des dissidences absolument insignifiantes et négligeables relativement aux usages statistiques, vous en verrez la preuve ci-après.

Parmi les quatre départemens restans, il en est un, celui de la Haute-Saône, pour lequel la différence entre nos valeurs respectives de S′ et S tient à quelque erreur qui s'est glissée dans votre calcul, ou à quelque faute de transcription, les

données de l'*Annuaire*, dont vous vous êtes servi, reproduisant exactement le nombre S tel que je l'ai employé.

Deux autres départemens, ceux de la Loire et de la Dordogne, exigent des corrections l'un dans les décimales de π et $\frac{\pi}{P}$, l'autre seulement, à la première décimale de π affectée d'une faute d'impression qui est restée inaperçue; mais ces deux légères corrections ne changent rien au rang qu'occupe chacun des deux départemens dans la classification des *Populations spécifiques*.

Enfin un 4[me] département, l'Aude, est malheureusement celui sur lequel porte la presque totalité des seules dissidences dignes d'attention et dont voici le tableau.

NOMS DES DÉPARTEM[s].	VALEURS de S'.	VALEURS de S.	VALEURS de E.	VAL[s]. VRAIES de π.	VAL[s]. VRAIES de $\frac{\pi}{P}$.
	kilom. carr.	kilom. carr.			
Haute-Saône .	5000,22	5002,20	— 1,98	Comme dans l'*Annuaire*.	Comme dans l'*Annuaire*.
Loire . . .	4908,04	4920,52	— 12,48	79,50703	Id.
Dordogne . .	9086,70	8982,74	+ 103,96	53,7419	0,891414
Aude . . .	12990,00	6509,96	+ 6480,04	41,4941	0,68826

Cette table donne lieu aux observations suivantes;

1° La population de la Haute-Saône, extraite de l'*Annuaire* de 1833, est $\Pi = 338910$, et on a

$$\pi = \frac{338910}{5002,20} = 67,752, \text{ d'où } \frac{\pi}{P} = 1,12380,$$

comme ma table l'indique. Je soupçonne que, dans votre table, on a écrit, par inadvertance, 500022 au lieu de 500220, la dissidence apparente étant due au déplacement d'un zéro;

2° On a pour la Loire

$$\pi = \frac{391216}{4920,52} = 79,50703, \text{ d'où } \frac{\pi}{P} = 1,31879.$$

L'imprimeur a mis, comme je l'ai dit ci-dessus, 7 au lieu de 5 à la première décimale de π, et cette faute est restée inaperçue;

3° Les données de la Dordogne sont :

$$\frac{\Pi}{S}=\pi=\frac{482750}{8982,74}=53,7419\text{, d'où }\frac{\pi}{P}=0,891414\text{;}$$

4° Les corrections à faire aux chiffres des deux départemens précédens, ne les empêchent pas de conserver leurs rangs dans la série des *Populations spécifiques;* il n'en est pas de même du département de l'Aude, qui fournit les données

$S=6509,96$; $\Pi=270125$, d'où $\pi=41,494$ et $\frac{\pi}{P}=0,68826$;

d'après ces rectifications, l'Aude doit être placée entre la Nièvre et la Marne, ce qui l'élève de 15 rangs.

En définitive, si on ajoute à la somme des surfaces de votre table les 198 hectares qui manquent au département de la Haute-Saône, la différence entre cette somme ainsi augmentée et celle du cadastre sera 657033

Les départemens de l'Aude, de la Dordogne et de la Loire, entrent dans cette différence pour 648004 + 10396 — 1248 = ... 657152

Somme des différences fournies par les 83 autres départemens. . . . . — 119

La répartition de ces 119 hectares, ou 1,19 kilom[s]. carrés, entre les 83 départemens, ne donne aucune différence, soit positive, soit négative, surpassant 20 hectares; il est donc manifeste, et les applications numériques de l'équation

$$\frac{E}{\varepsilon}=\frac{S}{\pi},$$

en fourniraient aisément la preuve, que la classification de ces 83 départemens, par ordre de *Populations spécifiques*, ne serait nullement dérangée en substituant les valeurs de S' à celles de S; ainsi, Monsieur, vos calculs, quoique fondés sur des

données qui n'ont pas l'exactitnde rigoureuse, n'en prouvent pas moins que ma table des *Populations spécifiques* remplit très-bien les conditions exigibles pour les usages statistiques, les trois corrections, indiquées ci-dessus, étant faites.

Veuillez bien, Monsieur, agréer avec mes remercîmens de votre envoi, l'assurance de ma parfaite considération.

Paris, le 21 mai 1834.

Lettre du rédacteur à M. D'IVERNOIS, *sur quelques points relatifs à la vie moyenne* (extrait de la *bibliothèque universelle* de Genève, mars 1834.)

Vous me demandez mon avis sur une question très-belle, dont j'ai déjà eu l'occasion de m'occuper, et dont je crois avoir entretenu *M. Villermé* lors de son séjour à Bruxelles; savoir, si deux peuples qui auraient pour nombres proportionnels des naissances et des décès, précisément les deux mêmes chiffres ne pourraient pas avoir deux vies moyennes différentes. A la solution de cette question se rattachent des considérations assez importantes et qui intéressent à un haut point la statistique et l'économie politique. Je m'estime heureux de pouvoir m'expliquer ici sans le secours des chiffres, et de mettre la question en quelque sorte en dehors du domaine de l'algèbre.

Supposons, pour plus de simplicité, un peuple ayant chaque année le même nombre de naissances et le même nombre de décès; et examinons si la vie moyenne ne pourrait pas y varier d'une année à l'autre : cette question revient, au fond, à celle qui a été posée précédemment. Si l'on formait, d'après les décès d'une année, une table de mortalité, et qu'on en déduisît la durée de la vie moyenne, on trouverait, je suppose, 30 ans exactement. L'année d'après, si la mortalité a lieu de la même manière et dans les mêmes proportions, la durée de la vie

moyenne sera encore de 30 ans. Mais si, dans la liste des décès de cette seconde année, on substitue un enfant d'un an à un homme de 40 ans, ce qui ne changera en rien le chiffre proportionnel des naissances ni celui des décès, on trouvera cependant, en tenant compte de l'enfant substitué à l'homme fait, que la vie moyenne en deviendra un peu plus courte, puisque la somme des années vécues sera devenue moindre de 39 ans. Nous voyons déjà que, si les tables de mortalité et la durée de la vie moyenne n'étaient calculées que d'après les observations de cette année, elles ne pourraient offrir identiquement les mêmes résultats que pour la première année. La vie moyenne serait plus *courte*, et cependant il est évident que la société aurait *gagné*, puisqu'elle aurait conservé un homme utile au lieu d'un enfant.

On conçoit que, si au lieu d'une seule substitution semblable, il s'en faisait un grand nombre, la vie moyenne, calculée d'après les décès de cette année, se trouverait diminuée d'une manière très-sensible; et néanmoins on aurait lieu de s'en réjouir, ce qui, au premier abord, paraît un paradoxe. Dans le fait, on aurait conservé des années très-utiles à l'état, en échange contre des années qui lui sont coûteuses.

Mais on objectera que ces 39 années ne sont pas perdues pour la somme des années vécues, et que l'individu de 40 ans qui a été remplacé, alongera plus tard, en mourant, la vie moyenne, de toute la durée dont il l'a raccourcie lors de sa substitution : et en effet, si la période de tems d'après laquelle on calcule la vie moyenne, s'étend assez pour comprendre le décès de l'individu en question, on conçoit que cette dette de 39 années n'a été que différée, et que la masse des années vécues ne s'en trouve pas frustrée. Ainsi la vie moyenne reste la même; mais il est toujours vrai de dire qu'alors même il y a eu bénéfice pour la société, puisque, pendant un tems plus ou moins long, des années utiles ont été mises à la place d'années coûteuses.

Si par un concours de circonstances que semble devoir faire naître la civilisation, il se fait des substitutions semblables à celle que nous avons signalée, non pas pour une année seule-

ment, mais pour plusieurs, et que cet état de choses aille croissant, on conçoit qu'il deviendra impossible, en conservant les mêmes nombres proportionnels de naissances et de décès, de conserver la même vie moyenne; elle devra diminuer. Cependant, comment se fait-il que des résultats si extraordinaires ne s'observent pas? C'est, je crois, que ces substitutions ne sont jamais assez nombreuses, ni leur durée assez longue pour laisser des traces sensibles au milieu des autres élémens influens.

Ceci nous apprend cependant combien il faut être en garde contre les inductions qu'on pourrait tirer de la vie moyenne, calculée d'après *peu* d'années d'observations, et chez un peuple qui est en progrès ou en décadence. J'ai déjà fait des remarques semblables au sujet des tables de mortalité, dans mes *Recherches sur la reproduction*.

En étendant les raisonnemens précédens, on arrive sans peine à ces conclusions :

1° Un peuple peut avoir annuellement pour nombres proportionnels des naissances et des décès, exactement les mêmes chiffres, sans que pour cela sa vie moyenne reste la même; et par suite, deux peuples qui auraient, etc.

2° Quand, toutes choses égales, la mortalité épargne les hommes faits et frappe les enfans, la durée de la vie moyenne diminue, et *vice versâ;* bien entendu si l'on calcule la vie moyenne sur l'âge des décédés.

3° Les chiffres des naissances, des décès et de la vie moyenne, peuvent conserver la même valeur, tandis que dans le fait, la population éprouve de grandes pertes ou reçoit de grands avantages qui restent masqués.

Pour estimer convenablement ce qu'une population gagne ou perd, il est nécessaire, en faisant la répartition des années, pour établir la vie moyenne, de tenir compte de la *qualité* de ces années et d'examiner si elles sont *productives* ou non.

Bruxelles, le 22 mars 1834. A. QUETELET.

NOTE de M. *D'Ivernois*. Cette solution lumineuse est précisément celle à laquelle j'étais arrivé de mon côté, et que m'adresse du sien le docteur

Villermé. Elle me servira de boussole dans mon travail sur la marche des populations britanniques, travail pour lequel j'ajourne encore la publication de celui du même genre qui concerne la France, afin de pouvoir en faire une espèce de pendant l'un à l'autre. L'expérience prouve que des *statistiques comparées* sont l'un des meilleurs moyens d'utiliser ces arides recherches, etc.

Sur les différences et les différentielles des fonctions de zéro. Par W. Hamilton, astronome royal d'Irlande. (1)

C'est au docteur Brinkley que l'on doit, à ma connaissance, *les* premières recherches importantes que l'on ait faites sur les différences des puissances de zéro; elles parurent dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1807. Ce sujet fut repris par M. *Herschel* dans les *Transactions philosophiques* pour 1816; et dans un recueil d'exemples relatifs au calcul des différences finies publié, quelques années après, à Cambridge. Ce dernier ouvrage renferme un théorème remarquable pour le développement d'une fonction d'une exponentielle népérienne, au moyen des différences des puissances de zéro. Ayant examiné de près ce théorème de M. *Herschel*, je fus conduit à un autre théorème plus général, que je soumets aujourd'hui à l'Académie. Ce nouveau théorème renferme trois fonctions arbitraires; l'on obtient le théorème de M. *Herschel*, en faisant une de ces fonctions égale à une puissance, et l'autre égale à une exponentielle népérienne.

Le théorème de M. *Herschel* est celui-ci.

$$f(e^t) = f(1) + tf(1+\Delta)\,0^1 + \frac{t^2}{1.2}f(1+\Delta)\,0^2 + \text{etc.} \quad \text{(A)}$$

---

(1) Cette note a été lue à l'Académie Royale d'Irlande, le 13 juin 1831, et va paraître dans le tome 17me des *Transactions* de cette société.

$f(1+\Delta)$ dénote une fonction qui peut être développée selon les puissances entières et positives de Δ, et chaque produit de la forme $\Delta^m o^n$ représente, comme dans la notation du docteur Brinkley, une différence d'une puissance de zéro.

Voici maintenant le théorème que j'offre comme plus général :

$$\varphi(1+\Delta) f\psi(o) = f(1+\Delta')\,\varphi(1+\Delta)\,[\psi(o)]^{o'}; \quad \text{(B)}$$

ou bien

$$F(D) f\psi(o) = f(1+\Delta')\,F(D)\,[\psi(o)]^{o'}. \quad . \quad . \quad \text{(C)}$$

dans ces équations, f, φ, F, ψ, sont des fonctions arbitraires telles toutefois, que $f(1+\Delta')$; $\varphi(1+\Delta)$, F(D) peuvent être développées selon les puissances entières et positives de $\Delta'\Delta$D; et après ce développement, $\Delta'\Delta$ désignent une différentiation par rapport aux variables $o'o$ qui s'évanouissent ensuite, et D indique une dérivée de quantités différentielles rapportées à la variable o. Si, dans la formule (C), nous donnons des valeurs particulières aux fonctions F, ψ, que nous fassions, par exemple, F égale à une puissance et ψ égale à une exponentielle népérienne, nous déduirons le corollaire suivant :

$$D^x f(e^o) = f(1+\Delta')\,D^x e^{oo'} = f(1+\Delta')o^x;$$

ce qui montre que dans le développement de $f(e^t)$, le coefficient

$$\frac{t^x}{1.2\ldots x}$$

peut être représenté par $f(1+\Delta)o^x$; c'est là précisément le théorème (A) de M. *Herschel*.

Addition.

Les deux formules (B) (C) peuvent être renfermées dans l'équation suivante :

$$\nabla' f\psi(o') = f(1+\Delta)\,\nabla'[\psi(o')]^o. \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Pour faire comprendre et pour prouver cette équation, j'observe que dans la série de *Maclaurin*,

$$f(x) = f(o) + \frac{Df(o)}{1}x + \frac{D^2 f(o)}{1.2}x^2 + .. + \frac{D^n f(o)}{1.2..n}x^n + ...$$

il est permis de poser $x^n = (1+\Delta)\,x^o$: ce qui donne

$$f(x) = f(o) + \frac{Df(o)}{1}.(1+\Delta)\,x^o + \frac{D^2 f(o)}{1.2}.(1+\Delta)^2 x^o + \text{etc.}$$

ou bien

$$f(x) = f(1+\Delta)x^o : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Cette dernière expression, remarquable par sa simplicité, est vraie, même lorsque la série de *Maclaurin* est en défaut, et donne, en considérant x comme une fonction ψ d'une nouvelle variable o', et en effectuant une opération ∇' par rapport à la dernière variable,

$$\nabla' f\psi(o') = \nabla' f(1+\Delta)\,[\psi(o')]^o. \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

Si maintenant cette opération ∇' consiste dans une combinaison quelconque de différences et de différentiations, comme cela arrive pour les équations (B) et (C), et en général si l'on peut transposer les symboles de l'opération ∇' et $f(1+\Delta)$, ce qui peut avoir lieu pour une variété infinie de formes de ∇', l'on tombe sur le théorème (D). Il est évident que ce théorème peut être étendu aux fonctions de plusieurs variables.

Note sur quelques applications de la méthode des projections; par J. N. Noël, principal de l'athénée de Luxembourg.

La méthode des projections orthogonales fournit, comme on sait, très-simplement, les principales propriétés de l'ellipse; et en particulier, on en déduit, avec facilité, que *dans l'ellipse*, 1° *les tangentes aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles entre elles; 2° elles interceptent sur la droite qui passe par un foyer et un point de contact, une longueur égale au grand axe; 3° cette longueur est divisée en deux parties égales par le conjugué du diamètre proposé.*

Et de là résulte immédiatement le premier des deux théorèmes énoncés, page 376 du tome VII de la *Correspondance*.

La même méthode conduit très-simplement à *trouver le plus grand des triangles ou des quadrilatères inscrits dans une ellipse donnée, ainsi que le moindre des triangles ou des quadrilatères circonscrits.* Les projections servent aussi à résoudre aisément le problème, plus difficile, de *construire la moindre ellipse circonscrite et la plus grande ellipse inscrite, dans un triangle ou un quadrilatère donné.* Nous allons considérer ce problème, qui ne paraît pas avoir été traité encore par la méthode des projections; mais avant, il sera bon de rappeler les théorèmes sur lesquels nous aurons à nous appuyer, et qu'on démontre, avec facilité, par les premiers principes de la trigonométrie.

I. *De tous les polygones d'un même nombre* n *de côtés et inscrits dans le même cercle, celui dont l'aire et le périmètre sont les plus grands possibles, est régulier.*

Soit c la corde du segment capable de l'angle a compris par deux côtés adjacens x et y de l'un des polygones proposés, et z la perpendiculaire à c, tirée du sommet de cet angle. Si t désigne l'aire du triangle terminé par c, x et y, il est clair qu'on aura

à la fois

$$\tfrac{1}{2}xy \sin. a = \tfrac{1}{2}cz = t, \text{ et } c^2 = x^2 + y^2 \mp 2xy \cos. a.$$

Ces deux équations fournissent évidemment celles-ci :

$$2t = cz \text{ et } (x+y)^2 = c^2 + \frac{2cz}{\sin. a}(1 \pm \cos. a).$$

Si la corde c, demeure invariable, ainsi que le reste du polygone, il en sera de même de l'angle a, et de sin. a et cos. a. Or, à cause de cos. $a < 1$, il est clair que la perpendiculaire z est un maximum, dès que les côtés x et y sont égaux ; d'où il suit alors que l'aire t et la somme $x + y$ sont les plus grandes possibles.

Ainsi, pour que l'aire et le contour du polygone inscrit de n côtés, soient des maximums, il faut que deux côtés adjacens quelconques soient égaux entre eux ; donc tous les côtés doivent être égaux, et par conséquent le polygone doit être régulier.

II. Réciproquement, *parmi tous les polygones, d'un même nombre* n *de côtés équivalens ou isopérimètres entre eux, et inscriptibles dans différens cercles, le régulier est celui pour lequel l'aire ou la circonférence du cercle circonscrit, est un minimum.*

1° Soient P et P′ deux des polygones équivalens proposés, le second étant seul régulier ; soient r et r' les rayons des cercles circonscrits, et soit enfin P″ le polygone régulier de n côtés, inscrit dans le même cercle que P. On aura d'abord (théor. I) $P'' > P$ ou $P'' > P'$. Mais les polygones réguliers P′ et P″ ayant un même nombre de côtés, on a

$$P' : P'' :: r'^2 : r^2.$$

Donc puisque $P' < P''$, on a aussi $r'^2 < r^2$ et $\pi r'^2 < \pi r^2$;

2° Si l'on suppose que les polygones P et P′ ne soient pas équivalens, mais aient le même périmètre p ; en désignant par

p' le périmètre de P'', d'où $p' > p$ (théor. I), la proportion

$$p : p' :: r' : r,$$

donnera $r' < r$ et $2\pi r' < 2\pi r$. Ce qui achève la démonstration du théorème proposé.

III. *De tous les polygones d'un même nombre* n *de côtés et circonscrits à un même cercle, celui de moindre surface et de moindre contour, est régulier.*

D'abord comme l'aire de tout polygone circonscrit est égale au périmètre multiplié par le demi-rayon du cercle, il suffit de chercher le contour minimum. Soit donc x un côté de l'un des polygones proposés et $2a$ l'arc terminé aux points de contact des deux côtés adjacens ; $2x$ sera évidemment la longueur de la ligne brisée qui enveloppe, d'une extrémité à l'autre, l'arc $2a$. Menant du centre les droites y et z aux extrémités de x, ces droites formeront évidemment avec x, un triangle, dont x sera la base, le rayon r du cercle la hauteur et a la mesure de l'angle du sommet. La double expression de l'aire de ce triangle, donne

$$\tfrac{1}{2} yz \sin. a = \tfrac{1}{2} rx \,;\ \text{d'où}\ yz = \frac{rx}{\sin. a}.$$

De plus, il est clair qu'on a

$$x^2 = y^2 + z^2 \mp 2yz \cos. a = (y-z)^2 + 2yz\,(1 \mp \cos. a).$$

Substituant la valeur de yz et posant, pour abréger,

$$b = \frac{r}{\sin. a}\,(1 \mp \cos. a),$$

il viendra

$$x^2 = (y-z)^2 + 2bx\,;\ \text{d'où}\ (x-b)^2 = (y-z)^2 + b^2.$$

Si $2a$ est constant, aussi bien que r, et par suite $\sin. a$ et $\cos. a$,

il en sera de même de b, évidemment positif, puisque cos. $a < 1$. Donc le minimum de x et de $2x$ aura lieu dès qu'on aura $y = z$; c'est-à-dire quand les deux angles du polygone, adjacens à x, seront égaux entre eux.

Ainsi pour que le périmètre du polygone circonscrit de n côtés soit le moindre possible, il faut que les deux angles adjacens à un côté quelconque, soient égaux entre eux; tous les angles du polygone doivent donc être égaux, et par conséquent ce polygone doit être régulier.

IV. Réciproquement, *parmi tous les polygones d'un même nombre* n *de côtés, équivalens ou isopérimètres entre eux, et circonscriptibles à différens cercles, le régulier est celui pour lequel l'aire ou la circonférence du cercle inscrit est un maximum.* (Démonstration tout-à-fait analogue à celle du théorème II.)

Les théorèmes précédens fournissent plusieurs corollaires, auxquels il est inutile de s'arrêter ici; et nous allons employer ces théorèmes et la méthode des projections, à la résolution des deux problèmes que voici.

PROBLÈME I. — *Trouver la plus grande ellipse inscrite et la plus petite circonscrite à un triangle donné* t.

On sait qu'une ellipse donnée peut toujours être regardée comme l'intersection d'un cylindre droit par un plan incliné à son axe. Soit e l'aire d'une ellipse inscrite dans le triangle proposé t; soient t' et πr^2 les aires des projections respectives du triangle t et de l'ellipse e, sur le plan de la base du cylindre droit; soit enfin u l'angle des deux plans. Rien n'empêche de prendre l'angle u égal à celui de tout triangle équilatéral; ce qui sera plus simple et donnera cos. $u = \frac{1}{2}$: alors, d'après le principe des projections, on aura à la fois

$$t' = \tfrac{1}{2}\, t \text{ et } \pi r^2 = \tfrac{1}{2}\, e.$$

La projection de l'ellipse e étant un cercle πr^2, inscrit dans la



projection t' de t; et les nombres u, t, t' et π étant d'ailleurs invariables; il est évident que l'aire e sera un maximum, lorsque le cercle πr^2 sera le plus grand possible; ce qui arrivera, comme on l'a vu (théor. IV), dès que le triangle t' sera équilatéral. Mais alors le cercle inscrit dans t', touche ses côtés en leurs milieux, et son centre se confond avec le centre de gravité de t' : donc aussi l'*ellipse maximum* e *touche chacun des côtés du triangle proposé* t, *en son milieu; et le centre de cette ellipse coïncide avec le centre de gravité du triangle* t.

L'ellipse maximum inscrite est bien aisée à tracer. D'abord on connaît la direction de son grand axe $2a$; lequel, pour être le plus grand diamètre de l'ellipse, doit faire avec sa projection $2r$, le plus grand angle u' possible, afin que sa valeur

$$2a = \frac{2r}{\cos. u'}$$

soit un maximum; ce qui n'a lieu que quand $2a$ est perpendiculaire à l'intersection des plans de t et t'; d'où $u'=u$, $\cos. u' = \frac{1}{2}$ et $2a = 4r$. Ensuite, on a la position du petit axe, nécessairement égal à $2r$. De plus, c désignant le côté du triangle équilatéral t', on sait que le rayon r du cercle inscrit, est le tiers de la hauteur $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$ de ce triangle. Ainsi, pour déterminer a, c, r, et e, on aura les équations

$$a = 2r,\ r = \tfrac{1}{6}c\sqrt{3},\ t' = \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}t \text{ et } e = 2\pi r^2.$$

Ces équations donnent

$$c = \sqrt{\tfrac{2}{3}t\sqrt{3}},\ a = 2r = \tfrac{1}{3}\sqrt{2t\sqrt{3}} \text{ et } e = \tfrac{1}{9}\pi t\sqrt{3}.$$

Les axes $2a$ et $2r$ étant ainsi connus de grandeur et de position, il en résulte les foyers, et par suite le tracé de l'ellipse cherchée.

Quant à la moindre ellipse, circonscrite au triangle proposé t;

si l'on observe que le moindre des cercles, circonscrits aux triangles équivalens à t', est celui pour lequel t' est équilatéral (théor. II), on verra, par des raisonnemens tout-à-fait semblables aux précédens, que *la moindre de toutes les ellipses, circonscrites à un triangle donné* t, *est celle dont le centre coïncide avec le centre de gravité de ce triangle.*

L'ellipse circonscrite minimum e' est encore bien aisée à décrire. Car on connaît les directions de ses deux axes $2a'$ et $2r'$; et leurs longueurs sont données par les formules

$$a' = 2r' = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t\sqrt{3}}\,;\ \text{d'où}\ e' = \tfrac{4}{9}\pi t\sqrt{3}\ \text{et}\ e' = 4e.$$

Les deux ellipses e et e' ont le même centre; leurs axes sont proportionnels et dirigés suivant les mêmes droites : donc ces *deux ellipses sont semblables.* Il est aisé de voir, en effet, par les projections, qu'en inscrivant à volonté une ligne brisée dans e, on pourra toujours inscrire une ligne brisée semblable dans e' (les sommets des angles égaux, dans ces deux lignes, se trouvant sur la même droite, tirée du centre commun); or, tel est le caractère des courbes semblables.

PROBLÈME II. — *Trouver la plus grande ellipse inscrite et la plus petite circonscrite à un quadrilatère donné.*

Soit Q l'aire du quadrilatère donné, Q' sa projection sur un plan et u l'angle des deux plans. Si l'angle u est droit, deux angles opposés de Q' vaudront chacun deux angles droits, et les deux autres angles seront nuls : faisant diminuer u, les deux premiers angles opposés diminueront aussi, et finiront par ne plus valoir ensemble que deux angles droits ; alors, en fixant les deux plans dans cette position, ce qui détermine l'angle u, *le quadrilatère Q' sera inscriptible dans un certain cercle.* D'un autre côté, l'angle u restant invariable, on conçoit qu'il est toujours possible de placer le quadrilatère Q, dans son plan, de manière que la somme de deux côtés opposés de la projection Q',

soit égale à la somme des deux autres côtés ; et dans ce cas, *le quadrilatère* Q′ *sera circonscriptible à un cercle.*

Cela posé, soit πr^2 l'aire du cercle inscrit dans Q′ ; ce cercle sera la projection d'une ellipse E, inscrite dans le quadrilatère proposé Q. On aura donc à la fois

$$Q' = Q \cos. u \text{ et } \pi r^2 = E \cos. u.$$

Puisque Q et u sont donnés invariables, l'aire Q′ est constante. Et comme il y a une infinité de quadrilatères, équivalens à Q′, circonscriptibles à différens cercles ; il y a aussi une infinité d'ellipses, inscrites dans le quadrilatère proposé Q. La plus grande de ces ellipses répond évidemment au plus grand cercle inscrit dans Q′. Or, ce cercle est le plus grand possible, dès que Q′ est un carré (théor. IV) ; et puisqu'alors le cercle πr^2 a même centre que le carré Q′, et touche les côtés de Q′ chacun en son milieu, on voit que *la plus grande ellipse, inscrite dans un quadrilatère donné, touche les côtés de ce quadrilatère en leurs milieux ; son centre étant à l'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés opposés du même quadrilatère.*

Il est facile de décrire l'ellipse inscrite maximum E. D'abord son centre est connu, ainsi que les directions de ses deux axes $2a$ et $2r$, dont le grand $2a$ est perpendiculaire à l'intersection des plans de Q et Q′. De plus, c étant le côté du carré Q′, on a à la fois

$$Q' = c^2 = Q \cos. u, \ c = 2r \text{ et } r = a \cos. u ;$$

d'où l'on tire

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{Q \cos. u}, \ a = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\cos. u}} \text{ et } E = \tfrac{1}{4}\pi Q.$$

On a donc ainsi la position et la grandeur de chacun des deux axes de l'ellipse maximum E ; ce qui donne les moyens de la construire.

A l'égard de la plus petite ellipse circonscrite au quadrilatère proposé Q, nous avons déjà vu que l'angle u des deux plans est tel, que la projection Q' est un autre quadrilatère, inscriptible dans un cercle $\pi r'^2$. Or, comme il existe une infinité de quadrilatères, équivalens à Q', que l'on peut inscrire dans différens cercles, il existe aussi une infinité d'ellipses, circonscrites au quadrilatère proposé Q. La plus petite de ces ellipses, ayant évidemment pour projection le moindre cercle circonscrit à Q', répond au cas où Q' est un carré c^2 (theor. II). Mais alors le centre du cercle minimum $\pi r'^2$, coïncide avec celui du carré c^2, dont les deux diagonales, perpendiculaires entre elles, sont les projections de deux diamètres conjugués de l'ellipse minimum E', circonscrite au quadrilatère proposée Q. On connaît donc la position du centre de cette ellipse et la direction de ses axes $2a'$ et $2r'$: on peut d'ailleurs calculer leurs longueurs. Car ayant à la fois

$$Q' = c^2 = Q \cos. u, \; c = r'\sqrt{2} \text{ et } r' = a \cos. u,$$

il vient

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2Q \cos. u}, \; a' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2Q}{\cos. u}} \text{ et } E' = \tfrac{1}{2}\pi Q.$$

Il est facile de voir aussi que les ellipses maximum et minimum E et E', sont semblables, et qu'on a E' = 2E.

Luxembourg, le 16 juillet 1834.

Résumé des observations météorologiques faites à Maestricht pendant l'année 1833.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle centigrade; les hauteurs du baromètre, réduites à la température de la glace fondante, et corrigées de l'effet de la capillarité, sont énoncées en lignes des Pays-Bas (millimètres). La cuvette du baromètre est placée à 52, 51 aunes (mètres) au-dessus du niveau de la mer.

Enfin les hauteurs des eaux de la Meuse sont observées à l'entrée de la grande écluse du bassin à Maestricht, et rapportées à la moyenne hauteur du niveau de ce bassin, laquelle est fixée à 41, 95 aunes (mètres) au-dessus du zéro de l'échelle d'Amsterdam (*peil-schaal*).

TEMPÉRATURE.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS.					
	8 heures du matin.	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir.	6 heures du soir.	9 heures du soir.
Janvier . .	— 3°,67	— 3°,13	— 0°,13	+ 0°,08	— 1°,42	— 2°,15
Février . .	+ 4, 86	+ 5, 79	+ 7, 78	+ 7, 92	+ 6, 34	+ 5, 60
Mars . . .	+ 2, 02	+ 3, 04	+ 5, 58	+ 5, 66	+ 4, 09	+ 2, 70
Avril . . .	7, 94	9, 14	11, 34	11, 58	9, 92	7, 62
Mai	16, 24	17, 81	21, 20	21, 51	19, 90	15, 63
Juin. . . .	17, 79	19, 01	21, 60	21, 96	20, 07	16, 51
Juillet. . .	16, 73	17, 97	20, 42	20, 66	18, 71	15, 62
Août . . .	14, 00	15, 83	18, 27	18, 90	16, 49	12, 62
Septembre.	12, 60	13, 40	15, 69	16, 34	14, 45	12, 54
Octobre . .	8, 28	10, 01	14, 37	14, 60	12, 04	9, 73
Novembre.	4, 63	5, 28	7, 74	7, 93	6, 07	5, 51
Décembre.	6, 08	6, 52	4, 68	7, 72	7, 06	6, 81
MOYENNES.	+ 8°,96	+10°,06	+12°,64	+12°,91	+11°,14	+ 9°,06

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
Janvier . . .	+ 0°,32	— 4°,78	5°,10	+ 5°,2	—11°, 0	16°,2	29, à midi.	du 9 au 10	11°,3 le 26
Février . . .	+ 8, 60	+ 3, 90	4,70	+ 14, 1	— 6, 8	20,9	9, à midi.	du 1 » 2	14, 6 » 2
Mars	6, 20	0, 74	5,46	13, 8	— 4, 0	17,8	5, à midi.	du 12 » 13	11, 8 » 5
Avril	11, 91	5, 09	6,82	15, 3	+ 1, 5	13,8	27, à 3 h. s.	du 9 » 10	11, 6 » 10
Mai	21, 94	11, 48	10,46	27, 8	+ 4, 1	23,7	16, à 4 h. s.	du 31 a. au 1er m.	15, 3 » 4
Juin	22, 37	12, 61	9,76	29, 9	+ 6, 3	23,6	26, à 3 h. s.	31 m. au 1er juin.	16, 9 » 28
Juillet . . .	21, 10	12, 98	8,12	27, 1	+ 8, 0	19,1	7, à midi.	du 3 » 4	14, 3 » 5
Août	19, 18	9, 90	9,28	25, 3	+ 5, 0	20,3	29, à 3 h. s.	du 26 » 27	16, 3 » 27
Septembre . .	16, 45	10, 55	5,90	20, 8	+ 5, 7	15,1	25, à 3 h. s.	du 14 » 15	11, 8 » 15
Octobre . . .	14, 98	6, 57	8,41	20, 0	— 0, 6	20,6	25, à 3 h. s.	du 29 » 30	14, 8 » 8
Novembre . .	8, 16	3, 34	4,82	13, 5	— 3, 8	17,3	1, à midi.	du 13 » 14	9, 6 » 28
Décembre . .	8, 47	4, 52	3,95	12, 4	— 0, 5	12,9	5, à midi.	du 13 » 14	9, 4 » 9
MOYENNES . .	+ 13°,31	+ 6°,41	6°,90	+ 18°,77	+ 0°,33	18°,44			13°,1

Extrêmes de l'année. . . . . . { *Maximum.* = + 29°,9 ; *Minimum.* = — 11, 0

Intervalle de l'échelle parcouru. . . . 40°,9

N.B. Le thermomètre à *minimum* n'a pu être consulté pendant les mois de juillet, août et septembre.

Le *maximum* moyen et le *minimum* moyen sont les moyennes des plus hautes et des plus basses températures observées jour par jour.

Le *maximum* absolu et le *minimum* absolu sont la plus haute et la plus basse températures qui ont été observées pendant le mois entier.

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS. 8 heures matin.	9 heures matin.	MIDI.	3 heures soir.	6 heures soir.	9 heures soir.	MAXIMUM absolu.	MINIMUM absolu.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
	l	l	l	l	l	l	l	l	l		
Janvier . . .	765,157	765,345	764,807	764,674	764,827	764,817	776,644	740,751	35,893	8, à 9 h. mat.	29, à 9 h. soir.
Février. . .	749,964	749,609	749,716	749,718	750,056	749,085	761,794	730,555	31,239	6, à 9 h. mat.	15, à 10h.10'ma.
Mars. . . .	754,313	754,360	754,147	753,914	754,202	754,554	764,084	737,884	26,200	8, à 9 h. mat.	1, à 8 h. mat.
Avril. . . .	752,604	752,576	752,179	751,849	752,160	752,687	764,072	732,808	31,264	26, à 9 h. mat.	2, à 7 h. mat.
Mai	761,362	761,375	760,926	760,433	760,386	760,974	769,282	753,286	15,996	6, à 9 h. mat.	1, à 3 h. soir.
Juin. . . .	755,369	755,257	755,065	754,772	754,798	755,198	765,448	743,499	21,949	9, à 9 h. soir.	14, à 8 h. mat.
Juillet . . .	757,714	757,713	757,283	757,004	756,955	757,492	765,348	747,237	18,111	30, à 9 h. mat.	7, à 3 h. soir.
Août. . . .	755,593	755,639	755,285	755,030	754,760	755,433	763,959	730,623	33,336	2, à 9 h. mat.	31, à 9 h. soir.
Septembre. .	754,952	755,044	754,962	754,743	755,084	755,490	763,792	728,031	35,761	30, à 9 h. soir.	1, à 6 h. mat.
Octobre. . .	755,721	755,703	755,176	754,780	754,962	755,299	764,114	740,128	23,986	10, à 9 h. mat.	15, à 6 h. soir.
Novembre. .	758,005	758,195	758,100	757,684	757,664	757,491	766,843	737,303	29,540	18, à 9 h. soir.	7, à 9 h. soir.
Décembre . .	752,762	752,788	752,195	752,024	751,993	752,523	766,652	737,492	29,160	1, à 9 h. mat.	21, à 10 h. mat
MOYENNES . .	756,126	756,134	755,820	755,552	755,654	755,920	766,003	738,300	27,703		

Maximum absolu de l'année . . . . 776^l, 644

Minimum » » 728, 031

Intervalle de l'échelle parcouru . . 48, 613

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée en pouces des Pays-Bas (cent.) de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEURS DE LA MEUSE, EN AUNES DES PAYS-BAS (MÈTRES). Hauteur moyenne par mois.	Maximum absolu par mois.	Minimum absolu par mois.	Différence.	Date du maximum.	Date du minimum.
Janvier	7	2p,3900	0p,3414	+ 0a,326	+ 1a,13	— 0a,10	1a,23	1	26
Février	21	8, 1326	0, 3873	+ 2, 435	+ 3, 81	+ 0, 70	3, 11	17	1
Mars.	17	2, 6205	0, 1541	+ 1, 014	+ 1, 78	+ 0, 62	1, 16	2	26
Avril.	20	6, 3516	0, 3176	+ 1, 286	+ 2, 05	+ 0, 63	1, 42	4	28
Mai	9	1, 0000	0, 1111	+ 0, 157	+ 0, 64	— 0, 15	0, 79	1	31
Juin	15	3, 4821	0, 2321	— 0, 167	— 0, 04	— 0, 25	0, 21	7	23
Juillet.	18	3, 8180	0, 2121	— 0, 298	— 0, 10	— 0, 37	0, 27	9	22
Août.	19	2, 5019	0, 1317	— 0, 4[illegible]0	— 0, 31	— 0, 49	0, 18	23	13, 14, 15, 16
Septembre . .	18	6, 4187	0, 3566	— 0, 040	+ 0, 24	— 0, 40	0, 64	13	1
Octobre	12	1, 6719	0, 1393	— 0, 087	+ 0, 33	— 0, 33	0, 66	20	14
Novembre. . .	17	6, 9088	0, 4064	+ 0, 408	+ 1, 50	— 0, 11	1, 61	9	1
Décembre. . .	26	14, 3394	0, 5515	+ 3, 086	+ 4, 20	+ 0, 77	3, 43	25	1
	TOTAL. 199	TOTAL. 59p, 6355	MOYENNE. 0p, 2784	MOYENNE. + 0a,642	MOYENNE. + 1a,269	MOYENNE. + 0a,043	MOYENNE. 1a,226		

En divisant la hauteur de l'eau tombée par mois, par le nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle correspondant, on obtient la hauteur moyenne de l'eau tombée par chacun de ces jours.

NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.

MOIS.	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST.	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	6	4	5	1	3	3	7	2
Février	0	2	1	1	3	11	10	0
Mars	8	7	2	1	0	2	7	4
Avril	5	0	3	0	1	2	18	1
Mai	4	7	1	1	4	2	10	2
Juin	0	2	0	1	2	9	16	0
Juillet	4	4	3	0	0	1	18	1
Août	4	1	0	0	2	2	15	7
Septembre	6	2	1	0	7	4	5	5
Octobre	5	1	1	4	4	10	4	2
Novembre	1	1	2	0	2	8	15	1
Décembre	0	0	0	0	2	11	18	0
TOTAUX	43	31	19	9	30	65	143	25

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE							
	PLUIE.	GRÊLE.	NEIGE.	GELÉE.	TONNERRE	BROUILLARD	CIEL entièrement COUVERT.	CIEL sans NUAGES.
Janvier	5	0	3	23	0	6	7	7
Février	20	2	2	3	0	0	6	0
Mars	10	0	11	14	0	2	6	0
Avril	20	3	0	0	1	0	2	0
Mai	9	0	0	0	4	3	0	1
Juin	15	0	0	0	1	0	0	0
Juillet	18	0	0	0	2	0	1	0
Août	19	0	0	0	0	0	0	0
Septembre . . .	18	0	0	0	1	3	2	0
Octobre	12	1	0	1	0	6	2	3
Novembre . . .	17	1	0	6	0	3	7	2
Décembre . . .	26	6	4	2	1	0	9	0
TOTAUX. . . .	189	13	20	49	10	23	42	13

On pourra comparer les observations météorologiques faites à Maestricht en 1833, avec celles faites à Bruxelles pendant le cours de la même année. On en trouve les détails dans les *Annales de l'Observatoire* de Bruxelles, dont la première partie du tome I vient de paraître (1).

Sur les expériences du pendule du capitaine Foster.

M. *Francis Baily* a présenté à la société royale astronomique de Londres, dans sa séance du 8 novembre 1833, un rapport intéressant sur les résultats des nombreuses expériences du pendule à secondes, faites par le capitaine *Foster* dans une expédition qu'il a exécutée pour cet objet, par ordre de l'amirauté, et où il a eu le malheur de se noyer, après avoir déjà fait plus de vingt-mille observations de ce genre, dans quatorze stations comprises entre Londres et la Nouvelle-Shetland du sud.

Le capitaine *Foster* était muni de quatre pendules différens, dont deux de la construction du capitaine *Kater*, et les deux autres d'une nouvelle construction, recommandée par M. *Baily*, pourvus chacun de deux couteaux différens. Les résultats des diverses expériences en chaque station sont fort bien d'accord, sauf celui d'une nouvelle série à la Nouvelle-Shetland, et tendent à prouver de plus en plus que le pendule présente un bon moyen de mesurer la force relative de la gravité à diverses latitudes. M. *Baily* a découvert, cependant, dans cet instrument, de petites sources d'erreur qui n'avaient pas été soupçonnées encore et dont la correction donnera plus de poids aux expériences futures de ce genre, en les rendant plus comparables entre elles.

Le nombre de vibrations des pendules invariables en 24 heures, qui était de 86400 à Londres, où ils battaient les secondes de temps moyen., n'a plus été à Para, à un degré et demi de l'équateur, que de 86260 ½, tandis qu'à la Nouvelle-Shetland, à une latitude australe de 62° 56′, ce nombre a été de 86444 ½.

M. *Baily*, en adoptant pour la figure de la terre un ellipsoïde de révolution, et en introduisant dans la formule qui en résulte

(1) In-4°, chez M. *Hayez*, imprimeur, et chez les principaux libraires

pour le nombre V de vibrations du pendule en 24 heures à une latitude quelconque L, les valeurs numériques des coëfficiens résultant de l'ensemble des observations du capitaine *Foster*, combinées entre elles par la méthode des moindres carrés, est arrivé à la formule suivante :

$$V = (7441507482 + 3866641 8 \sin.^2 L.)^{\frac{1}{2}};$$

d'où il résulte que le nombre des vibrations doit être de 86264,2 à l'équateur, et de 86488 au pôle.

En comparant les valeurs que donne cette formule pour chaque station, avec celles qui résultent de l'observation directe, on trouve des différences dans l'un et l'autre sens, qui n'atteignent pas sept vibrations et demie en 24 heures, mais qui dépassent cependant de beaucoup l'erreur probable des observations. D'après l'accord qui existe entre les résultats des diverses séries en chaque station, et d'après les confirmations obtenues dans plusieurs cas, par des expériences analogues faites par d'autres observateurs, ces différences indiquent évidemment des influences locales sur le pendule, dont nous ne connaissons pas encore exactement la nature. La force de la gravité y semble plus grande, par exemple, en des îles situées à une grande distance de la terre ferme, telles que *Sainte-Hélène*, l'*Ascension*, etc., qu'elle ne l'est à la même latitude sur les continens. On voit par là, que ce n'est que par un grand nombre d'observations en diverses stations, qu'on peut parvenir à des résultats moyens dignes de confiance, relativement à la figure de la terre. La valeur de l'aplatissement du sphéroïde terrestre, qui se déduit de l'ensemble des expériences du capitaine *Foster*, est $\frac{1}{289,48}$; elle se rapproche beaucoup de $\frac{1}{288,4}$ qui avait été obtenu par le capitaine *Sabine* au moyen d'un nombre d'expériences cinq fois plus petit. Nous devons renvoyer pour plus de détails au N° 1 de la troisième année du bulletin des séances de la société astronomique, d'où nous avons extrait ce qui précède. Les expériences mêmes du capitaine *Foster* seront publiées dans le tom. VII, des mémoires de cette société. (Extrait de la *Bibliothéque Universelle de Genève*, mai 1834, pag. 101.)

Nota. Depuis que l'annonce précédente est écrite, les recherches de M. *Foster* ont été publiées avec un rapport très-intéressant de M. *Baily*, qui les a mises en ordre à la demande du conseil de la société royale astronomique de Londres. Ces recherches forment le tome VII des *Mémoires* de la même société; avant de recevoir ce volume, nous avions dit quelques mots sur des résultats curieux qu'il renferme et qui nous avaient été obligeamment communiqués par M. *Baily*. Voyez pag. 11, tom. VIII de la *Correspondance Mathématique*.

Notice sur Rodolphe de Bruges, XIIe siècle, par M. le baron De Reiffenberg.

Le surnom de Rodolphe ou Rodulphe annonce qu'il était né à Bruges, et Sanderus le compte en effet parmi les écrivains célèbres de cette ville. Il fut dirigé dans ses études par un philosophe platonicien d'une grande réputation, lequel s'appelait Thierri. Son goût l'attacha spécialement aux mathématiques, et comme les Arabes passaient pour y exceller, il apprit leur langue, afin d'être en état de comprendre les ouvrages qu'ils avaient composés sur cette science. Les auteurs de l'*Histoire littéraire de la France* (1), regardent même comme très-vraisemblable qu'il passa en Espagne dans cette vue, car ce n'était guère que dans ce pays qu'on pût trouver un maître d'Arabe. Quoiqu'il en soit, Rodolphe était à Toulouse en 1146 (2). Ce fut là qu'il mit en latin le *Planisphère* de Ptolomée sur la version arabe de Maslem; travail qu'il dédia à Thierri, son ancien précepteur. Chose remarquable! la version arabe est aujourd'hui inconnue; peut-être est-elle détruite sans retour, mais celle de Rodolphe se trouve entre les mains du public; elle a été imprimée par Walderus, en 1530, à Bâle, dans un volume qui comprend en outre les ouvrages d'Aratus, en grec et en latin, avec des scholies.

Le catalogue de la bibliothéque Cottonnienne, indique encore un autre ouvrage de Rodolphe, mais resté manuscrit, et qui a pour titre : *Descriptio cujusdam instrumenti cujus est usus in metiendis stellarum cursibus per Rodolfum Brugensem, Her-*

---

(1) XII, 356 et IX, Disc. prél. 197.

(2) Sanderus dit 1144.



manni secundi discipulum. C'est la description de l'astrolabe dont on attribue l'invention à Herman, surnommé *Contractus* ou le petit, écrivain du XI siècle, et de qui Rodolphe n'a pu être le disciple qu'en tant qu'il suivait sa méthode.

Un autre Rodolphe plus moderne a écrit aussi sur l'astrolabe; c'est le Frison Rodolphe de Battingen dont on a : *Methodus astrolabii, Parisiis*, 1557.

Aux auteurs cités qui ont parlé du mathématicien de Bruges, ont peut joindre Gérard Vossius, Huet *de claris interpretibus*, Gessner, Denis Harduin, Valère André, Sweertius et Foppens.

Correspondance scientifique et Annonces.

Dans les numéros 258, 259, 260 et 262 du journal de M. *Schumacher*, qui ont paru récemment, on trouve un mémoire très-intéressant de M. *Hansen*, directeur de l'observatoire de Gotha. Nous présenterons ici aux lecteurs de la *Correspondance*, l'extrait d'une lettre qui nous a été adressée par ce savant distingué, et qui les mettra à même d'apprécier l'importance de ses nouvelles publications.

« Dans la *Connaissance des temps* pour 1836, on trouve dans un mémoire de M. *Poisson* une note de M. *Pontécoulant*, dans laquelle il a comparé le coefficient de la grande inégalité de Jupiter, obtenu par moi dans une pièce couronnée, à celui de la mécanique céleste. Il trouve une différence plus grande que 400″ centésimales. En refaisant moi-même cette comparaison, j'ai trouvé que M. *Pontécoulant* devait s'être trompé, car la vraie différence entre ces deux résultats n'est que 45″ centésimales, différence dont on doit attribuer une partie à ce que *Laplace* s'est servi d'autres élémens elliptiques de Jupiter et de Saturne. D'ailleurs j'ai calculé le même coefficient par le développement analytique de la fonction perturbatrice, en fondant les calculs sur les mêmes élémens elliptiques dont je me suis servi dans mon mémoire couronné; et j'ai trouvé un résultat qui se confond jusqu'aux centièmes de seconde avec les résul-

tats de mon mémoire. Je viens d'écrire une note sur ce sujet que j'adresserai à M. *Schumacher* pour la faire insérer dans son journal. Outre cela, j'ai écrit dans ces derniers temps un mémoire sur la théorie des perturbations, dans lequel j'ai déduit mes équations fondamentales, par une marche directe, des équations fondamentales de la mécanique, et dans lequel j'ai fait voir que la théorie des perturbations que j'ai établie, est une extension de la théorie des constantes arbitraires. Dans le même mémoire, je donnerai l'application de mes formules à la recherche des perturbations produites par la résistance d'un fluide, et outre cela l'exposition d'une nouvelle forme des tables des planètes qui résulte immédiatement de la théorie que j'ai exposée dans mes derniers mémoires. (*Seeberg*, 22 mars 1834.)

— Nous apprenons par M. *Hamilton* que ce savant a présenté depuis peu à la société royale de Londres, un essai sur une méthode générale de dynamique, fondée sur l'idée d'une fonction caractéristique et qu'il a été décidé que cet essai serait imprimé dans les *Transactions philosophiques*.

— M. *Hamilton* nous fait connaître aussi, relativement à son mémoire imprimé dans les deux numéros précédens de la *Correspondance*, qu'il est parvenu à l'expression

$$t = \frac{\delta V}{\delta H},$$

pour le temps du mouvement d'un système de points ou de corps ; ce qui dispense de toute intégration subséquente, quand la fonction caractéristique V a été déterminée. Nous croyons devoir faire observer au sujet de ce mémoire que tout ce qui est présenté dans la *Correspondance* à partir de la page 71, 5e ligne en remontant, est textuellement traduit de l'anglais. Nous prévenons en même temps qu'une transposition de lettres a eu lieu à l'impression. Ainsi dans les formules 56, 57, 58 et 59 la lettre grecque ν a été changée dans la lettre française *v*; et dans les formules 33 à 56, la lettre grecque υ a été changée dans la même lettre française *v*.

De l'influence de la lune sur l'atmosphère terrestre, déterminée par les observations météorologiques; par M. Eug. Bouvard neveu (1).

Beaucoup de physiciens et d'astronomes ont cherché à connaître si la lune exerce une influence appréciable sur notre atmosphère. Quelques-uns, tels que *Pilgram* et *Toaldo*, convaincus d'avance de l'influence lunaire, ont combiné leurs observations dans le sens du système qu'ils s'étaient formé, d'après les traditions populaires : il est donc impossible d'ajouter une entière croyance aux résultats qu'ils ont donnés. D'autres, au contraire, procédant avec plus de méthode, sont arrivés à des résultats plus positifs, mais qui pourtant laissent encore à désirer de nouvelles séries d'observations pour les corroborer ou les détruire.

M. *Arago*, dans la notice qu'il a insérée dans l'*Annuaire du bureau des longitudes de* 1833, a fait connaître avec la plus grande clarté les observations de M. *Schübler*, professeur de Tubingue, et de l'astronome français *Flaugergues*. C'est à l'occasion de cette notice que j'ai entrepris de discuter les observations météorologiques, faites à l'observatoire de Paris, dont on n'avait encore tiré aucun parti sous ce rapport. Ces observations sont faites depuis une vingtaine d'années par une personne spécialement chargée de ce travail : le baromètre qui a servi à toutes ces observations, est un baromètre à cuvette, construit avec un grand soin par *Fortin*; il est divisé en millimètres et le vernier donne deux centièmes de millimètres.

(1) Cet article est extrait d'un mémoire lu à l'académie royale des sciences de Paris et destiné à paraître dans le recueil des savans étrangers.

Les observations barométriques que j'ai employées, datent de 1810, et vont jusqu'à l'année 1833, ce qui fait une période de 23 ans. Quant aux observations des vents, de la pluie et de l'état atmosphérique, j'ai pu remonter à 1804.

Si la lune a une influence appréciable sur l'atmosphère terrestre, cette influence peut se montrer dans trois cas principaux : 1° dans les révolutions synodiques ; 2° dans les révolutions anomalistiques ; 3° enfin dans les révolutions équatoriales.

Pour arriver à des résultats plus complets, j'ai donc combiné les mêmes observations météorologiques de trois manières différentes : ce qui, en définitive, m'a donné une masse de plus de deux cent dix mille observations que j'ai discutées avec le plus grand soin. Je vais indiquer, le plus succinctement possible, la marche que j'ai suivie et les résultats principaux auxquels je suis parvenu dans chacun des trois systèmes.

Influence de la lune, considérée dans sa révolution synodique, sur l'atmosphère terrestre.

La lune parcourt sa révolution synodique en 29j,53, terme moyen, et dans cet intervalle, elle présente diverses apparences qu'on appelle *phases*. La durée de cette révolution n'étant pas un nombre exact de jours, il ne m'était pas possible de combiner les observations comme la période l'exigeait. J'aurais bien pu, il est vrai, ne prendre que 29 jours, mais alors j'étais forcé de négliger un grand nombre d'observations, et je ne pouvais me résoudre à les laisser de côté. J'ai pensé qu'il valait mieux augmenter le temps de la révolution synodique de la lune d'un demi-jour, et alors elle se trouvait composée de 30 jours au lieu de 29j,53. Ici se présentait l'inconvénient contraire : au bout de deux révolutions, j'avais un jour de moins. Pour parer à ce défaut, j'ai répété deux jours de suite la dernière observation, de sorte que très-souvent, dans les tableaux, on trouve l'observation du 30e jour

répétée au 1er. Cette marche m'a paru la plus convenable pour pouvoir tenir compte de toutes les observations. Un travail préparatoire m'indiquait les observations qu'il fallait ainsi doubler.

Dans mes tableaux, la nouvelle lune m'a servi de point de départ : ainsi le 1er jour est le premier jour de la N. L., le 2e est le second, et ainsi de suite jusqu'au 30e qui est alors le dernier jour du D. Q. Chaque jour contient trois observations barométriques et autant d'observations thermométriques, faites à 9^h du matin, à midi et à 3^h du soir. La première est du 5 janvier 1810, et la dernière est du 21 décembre 1832.

Lorsque toutes ces observations ont été coordonnées suivant la période lunaire, j'en ai fait les sommes deux fois séparément, pour être sûr que je ne commettais pas d'erreur. J'ai pris ensuite les moyennes en divisant les sommes obtenues par 284, nombre total des révolutions synodiques que j'ai pu employer. Enfin j'ai réduit toutes ces hauteurs moyennes à zéro de température. Les résultats auxquels je suis parvenu, en ne considérant que la moyenne diurne des trois observations, sont consignés dans le tableau suivant :

Jours lunaires.	Hauteur moyenne du baromètre.	Jours lunaires.	Haut. moyenne du baromètre.	Jours lunaires.	Haut. moyenne du baromètre.
	mm		mm		mm
1	755,946	11	755,102	21	756,556
2	755,993	12	754,942	22	756,645
3	755,904	13	754,867	23	756,535
4	755,898	14	755,411	24	756,287
5	755,974	15	755,751	25	756,372
6	755,926	16	755,819	26	755,994
7	755,904	17	755,603	27	755,735
8	755,997	18	755,800	28	756,221
9	755,540	19	756,435	29	756,082
10	755,395	20	756,381	30	756,123

En examinant les résultats, on voit qu'il y a deux *maxima*

et deux *minima*. Le premier *maximum* a lieu le 8e jour, le 1er *minimum* le 13; le deuxième *maximum* le 22, enfin le deuxième *minimum* le 27. La différence du plus grand *maximum* au plus petit *minimum* est de 1^{mm},78. La hauteur moyenne générale du baromètre, conclue des 30 jours, est de 755^{mm},90. On peut voir dans la planche 2e la courbe de ces différentes hauteurs, afin d'en saisir plus facilement l'ensemble.

Les résultats précédens ne se rapportant pas tout-à-fait aux jours des phases de la lune, j'ai, par des moyennes prises de huit en huit jours, cherché à les déterminer plus exactement, ainsi que les hauteurs barométriques des octans. De cette manière on trouve les hauteurs moyennes suivantes :

		mm.			mm.
N. L.	=	755,988	P. L.	=	755,578
1er octant.	=	755,943	3e octant.	=	756,221
P. Q.	=	755,717	D. Q.	=	756,401
2e octant.	=	755,376.	4e octant	=	756,169.

Ainsi, le *maximum* a lieu au dernier quartier et le *minimum* au deuxième octant. C'est ce qu'avait trouvé antérieurement M. *Flaugergues*.

Maintenant si l'on ajoute ensemble les hauteurs barométriques trouvées pour la N. L., le 1er octant, le P. Q et le 2e octant d'un côté, et de l'autre pour la P. L., le 3e octant, le D. Q. et le 4e octant, et si l'on en prend la moyenne, on verra que la hauteur du baromètre est plus petite entre la N. L. et la P. L. et est plus grande depuis la P. L. jusqu'à la N. L. La différence est de 0^{mm},34. Lorsque le baromètre est élevé, c'est un signe, abstraction faite des changemens accidentels produits par les vents et peut-être par d'autres causes, c'est, dis-je, un signe que le temps est beau et qu'il ne pleuvra pas. Nous allons voir tout à l'heure que cela est exact, mais auparavant je ferai connaître un autre résultat.

Si l'on fait la somme des hauteurs barométriques correspondant à la N. L. et à la P. L., on verra que la moyenne de ces deux quantités est plus petite que celle qui est donnée

par la somme des hauteurs des deux quartiers. J'ai en effet trouvé une différence de $0^{mm},28$. Ainsi le baromètre est plus élevé aux quadratures qu'aux syzygies. Ce fait doit paraître aujourd'hui incontestable ; car *Toaldo* avait trouvé que la hauteur moyenne du baromètre, dans les quadratures, surpasse la hauteur moyenne dans les syzygies de $0^{mm},46$. M. *Flauguergues* a obtenu par ses observations une différence de $0^{mm},42$. M. A. *Bouvard*, mon oncle, par un nombre d'observations bien moins considérable, a eu aussi pour résultat une différence de $0^{mm},69$. Quoique la quantité à laquelle je suis parvenu, soit la moins forte de toutes celles que je viens de citer, elle est cependant toujours dans le même sens.

Passons maintenant aux observations de la pluie, des vents et de l'état atmosphérique ; elles sont beaucoup plus nombreuses que celles du baromètre, puisque j'ai pu remonter à 1804 ; ce qui fait 29 années ou 359 révolutions synodiques. Elles ont été combinées de la même manière que les précédentes.

Pour la pluie, j'ai pris les quantités d'eau tombée dans l'udomètre placé sur l'observatoire; j'ai regardé comme jours de pluie tous ceux où j'ai trouvé une quantité d'eau, provenant de pluie ou de neige fondue. Les moyennes m'ont donné les résultats suivans :

Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.	Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.	Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.
	mm			mm			mm	
1	1,59	123	11	1,66	129	21	1,54	122
2	1,73	134	12	1,57	142	22	1,37	109
3	1,26	118	13	1,36	148	23	1,41	130
4	1,35	115	14	1,43	122	24	1,04	107
5	1,33	122	15	1,08	121	25	1,29	111
6	1,19	118	16	1,46	115	26	1,26	115
7	1,04	103	17	1,18	119	27	1,56	120
8	1,52	132	18	1,34	117	28	1,01	100
9	1,72	125	19	1,11	119	29	1,50	120
10	1,43	132	20	1,39	124	30	1,44	113

Ces résultats n'étant pas assez réguliers, j'ai formé des périodes plus longues en prenant les moyennes de huit en huit jours, pour mieux juger de la différence des quantités d'eau tombée dans les phases et dans les octans. Voici ce que j'ai trouvé :

PHASES.	EAU TOMBÉE.	JOURS DE PLUIE.	PHASES.	EAU TOMBÉE.	JOURS DE PLUIE.
	mm			mm	
N. L. . . .	1,430	943	P. L. . . .	1,316	1003
1er octant .	1,376	965	3e octant. .	1,350	955
P. Q. . . .	1,405	976	D. Q. . . .	1,301	937
2e octant. .	1,471	1051	4e octant. .	1,314	916

On voit que le *maximum* d'eau tombée arrive au 2e octant et le *minimum* au D. Q. La différence est de 0,mm17. Le *maximum* du nombre de jours de pluie a lieu aussi au 2e octant et le *minimum* au 4e octant. La différence est de 135 jours.

Si on ajoute la pluie tombée de la N. L. à la P. L., on trouve une moyenne plus considérable que celle qui est donnée par la somme des quantités d'eau tombée entre la P. L. et la N. L. Les jours de pluie sont aussi bien plus nombreux.

Quant aux observations des vents et de l'état du ciel, j'ai pris, autant que possible, la moyenne de toutes les observations faites chaque jour. Les vents dont j'ai tenu compte, sont les huit principaux. Je marquais *variable* ou *calme*, les jours où le vent avait été variable ou nul. Pour l'état du ciel, j'ai adopté les distinctions suivantes : beau, serein, nuageux et couvert. J'ai compté aussi les jours où il a neigé, tonné et fait des éclairs ; mais je n'ai rien pu tirer de concluant de ces dernières observations.

Malgré toute l'incertitude que l'on est en droit de supposer aux résultats donnés par ces observations atmosphériques, je les indiquerai cependant, d'autant plus qu'ils s'accordent assez bien avec les précédens. Ainsi, en ne parlant que des vents S.-O. et N.-E., opposés l'un à l'autre, j'ai trouvé que les vents du S.-O. sont plus fréquens de la N. L. à la P. L. que

de la P. L. à la N.L. La différence est de 170. Les vents du N.-E. au contraire règnent plus souvent de la P. L. à la N. L. La différence, dans ce cas, est de 100. On verra mieux d'ailleurs, dans le tableau suivant, combien chaque vent a soufflé de fois, et quel rapport il y a entre leurs indications et les hauteurs barométriques :

INTERVALLES lunaires.	SO.	O.	NO.	N.	NE.	E.	SE.	S.
De la N. L. au P. Q.	612	346	319	284	335	114	197	298
Du 1er octant au 2e.	652	353	305	271	316	110	208	288
Du P. Q. à la P. L.	689	344	319	274	301	87	195	295
Du 2e octant au 3e.	648	358	361	260	308	81	194	274
De la P. L. au D. Q.	586	382	361	233	338	96	224	272
Du 3e octant au 4e.	548	385	345	238	380	109	215	274
Du D. Q. à la N. L.	545	353	352	254	398	121	202	298
Du 4e octant au 1r.	576	341	356	261	378	122	198	302

En examinant, dans ce tableau, les vents N.-E. et S.-O. qui, à Paris, indiquent plus spécialement le beau et le mauvais temps, on voit que le *maximum* du vent S.-O. arrive au 2e octant et et le *minimum* au dernier quartier. Le vent du N.-E. au contraire, a son *minimum* au 2e octant et son *maximum* au 4e octant, c'est-à-dire, quatre jours après le D. Q. On pourrait même dire que le vent N.-E. règne aussi souvent au D. Q. qu'au 4e octant; car la différence est peu considérable.

L'état du ciel fournit des remarques analogues, comme on peut en juger par le tableau suivant :

INTERVALLES LUNAIRES.	CIEL SEREIN.	CIEL NUAGEUX.	CIEL COUVERT.
De la N. L. au P. Q. . . .	285 jours.	1154 jours.	1433 jours.
Du 1er octant au 2e	275	1156	1436
Du P. Q. à la P. L.	218	1194	1455
Du 2e octant au 3e	224	1187	1461
De la P. L. au D. Q. . . .	293	1167	1412
Du 3e octant au 4e	320	1190	1362
Du D. Q. à la N. L. . . .	305	1198	1369
Du 4e octant au 1er	287	1189	1396

On peut, si l'on veut, laisser de côté les jours où le ciel a été nuageux, et regarder cet état de l'atmosphère comme tout-à-fait neutre. Si l'on examine ensuite les deux autres colonnes, on voit que le *maximum* des jours de *ciel serein* arrive au D. Q., et le *minimum* au 2e octant. Le *ciel couvert* a son *maximum* à la P. L. et son *minimum* au D. Q.

Le nombre de jours où le ciel est serein, est aussi beaucoup plus fréquent de la P. L. à la N. L. que de la N. L. à la P. L.; c'est le contraire pour l'état du ciel couvert.

Si l'on résume maintenant tous ces divers résultats, on verra quel accord remarquable règne entre eux, malgré l'incertitude de quelques-unes des observations employées.

Ainsi, au D. Q. on trouve :

1° Le *maximum* des hauteurs barométriques et du nombre de jours *sereins;*

2° Le *minimum* de la quantité de pluie et des jours où le ciel est couvert.

Le *minimum* du nombre de jours de pluie et du vent S.-O., ainsi que le *maximum* du vent N.-E., tombent indistinctement au 4e octant ou au D. Q.; car les différences sont peu sensibles.

Au 2e octant, au contraire, on a :

1° Le *minimum* des hauteurs barométriques, des jours *sereins* et du vent N.-E;

2° Le *maximum* de la quantité d'eau, du nombre de jours de pluie et du vent S.-O.

Le *maximum* du nombre de jours où le ciel est couvert a lieu indifféremment à la P. L. ou au 2e octant.

Ces résultats, qui d'ailleurs ont assez de concordance avec ceux de MM. *Schübler* et *Flaugergues*, semblent indiquer évidemment que la lune, considérée dans ses révolutions synodiques, a une certaine influence sur les variations de l'atmosphère terrestre; mais cette influence ne pourra être bien déterminée que lorque l'on aura des faits plus nombreux et des observations plus positives. On trouvera, dans la planche 2e, diverses courbes qui rendent sensible au premier coup d'œil l'ensemble des résultats auxquels je suis arrivé pour le baromètre et la pluie.

Influence de la lune, considérée dans sa révolution anomalistique.

La période de la révolution anomalistique de la lune étant de 27j,55, je ne pouvais, non plus que dans le système précédent, avoir une durée de temps fractionnaire. J'ai donc supposé la révolution de la lune de 28 jours, en ayant soin de répéter les observations, quand cela était nécessaire. Le 1er jour, dans mes tableaux, est le jour du périgée, et le 15e correspond à peu près à l'apogée. Les observations barométriques ont été disposées successivement pour 9h du matin, midi et 3h du soir. La première est du 8 janvier 1810 et la dernière du 22 août 1832. Les révolutions lunaires que j'ai pu obtenir sont au nombre de trois cents.

Après avoir, comme précédemment, fait deux fois la somme de ces observations, je les ai réduites à zéro de température et j'en ai pris les moyennes. On trouvera, dans le tableau suivant, les moyennes des hauteurs barométriques, conclues des trois observations prises pour chaque jour :

Jours lunaires	Hauteur barométr.	Jours lunaires	Hauteur barométr.	Jours lunaires	Hauteur barométr.	Jours lunaires	Hauteur barométr.
	mm		mm		mm		mm
1	755,628	8	556,086	15	756,206	22	755,669
2	755,814	9	755,885	16	756,123	23	755,812
3	755,356	10	756,091	17	756,307	24	756,018
4	755,414	11	755,657	18	755,955	25	756,324
5	755,557	12	755,622	19	756,138	26	755,606
6	755,798	13	755,630	20	756,442	27	755,376
7	756,010	14	755,846	21	756,055	28	755,288

On voit que la plus grande hauteur barométrique a lieu le 20ᵉ jour de la lune, et la plus petite le 28ᵉ. La différence entre les deux est de 1mm,154. Le *minimum* correspond bien au périgée ; car le 28ᵉ jour peut être considéré comme le 1er, puisque la période lunaire n'est pas tout-à-fait de 28 jours. Mais le *maximum* se trouve cinq jours après l'apogée. J'ai cherché à déterminer autrement ces deux points extrêmes, ainsi que les intermédiaires, afin d'arriver à des résultats plus réguliers.

Pour obtenir la hauteur moyenne du baromètre le jour du périgée, j'ai pris les hauteurs deux jours avant et deux jours après le 1er jour; je les ai ajoutées à ce 1er jour et j'ai conclu la moyenne des cinq observations. J'ai opéré de même pour l'apogée et les points intermédiaires. De cette manière, je suis parvenu aux résultats suivans :

ÉPOQUES LUNAIRES.	HAUTEURS BAROMÉTRIQUES.
	mm
Périgée.	755,492
Milieu entre le périgée et l'apogée.	755,974
Apogée.	756,022
Milieu entre l'apogée et le périgée.	755,999

Ainsi, le baromètre est plus élevé à l'apogée qu'au périgée de 0mm,53, résultat qui s'accorde assez bien avec ceux de M. *Flaugergues :* seulement il a trouvé une différence double de la mienne ; ce qui provient peut-être de la manière dont les moyennes ont été conclues. Quant aux points intermédiaires, on voit que la différence est à peu près nulle.

Les moyennes des observations de la pluie, des vents et de

l'état du ciel, reposent sur une somme de 380 révolutions lunaires. Voici les résultats donnés par la pluie :

Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.	Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.	Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.	Jours lunaires.	Eau tombée.	Jours de pluie.
	mm			mm			mm			mm	
1	1,38	133	8	1,42	138	15	1,32	133	22	1,62	131
2	1,62	123	9	1,22	131	16	1,23	121	23	1,50	132
3	1,26	123	10	1,08	102	17	1,10	121	24	1,41	124
4	1,39	132	11	1,41	123	18	1,30	137	25	1,69	149
5	1,24	113	12	1,36	132	19	1,28	121	26	1,20	126
6	1,28	113	13	1,41	119	20	1,27	138	27	1,54	129
7	1,42	126	14	1,42	142	21	1,25	125	28	1,65	148

Le *maximum* d'eau tombée et de jours de pluie arrive, comme on le voit, au 25e jour et diffère peu des quantités, trouvées pour le 28e. Le *minimum* a lieu le 10e jour.

J'ai déterminé plus exactement les moyennes de pluie, correspondant au périgée et aux autres points principaux, de la même manière que je l'ai fait pour les moyennes des hauteurs barométriques, et j'ai trouvé :

ÉPOQUES LUNAIRES.	EAU TOMBÉE.	JOURS LUNAIRES.
	mm	
Périgée.	1,49	656
Milieu entre le périgée et l'apogée	1,28	610
Apogée.	1,29	636
Milieu entre l'apogée et le périgée.	1,41	650

Ainsi la quantité de pluie est de $0^{mm},20$ plus grande au perigée qu'à l'apogée ; les jours de pluie sont aussi plus nombreux dans le même sens. Quant aux points intermédiaires, les différences ne sont sensibles que pour le nombre de jours de pluie.

En considérant de la même manière l'état du ciel, on trouve des résultats qui s'accordent assez bien avec les précédens. Le nombre de jours où le ciel a été *couvert* est plus grand au périgée qu'à l'apogée, tandis que les jours de *ciel nuageux* sont plus fréquens à l'apogée qu'au périgée. Les jours de *ciel serein* ne présentent aucune différence.

Dans ce second système, les vents n'indiquent absolument rien ; ils semblent même donner des résultats opposés. Au reste, j'ai déjà dit plus haut que les observations des vents sont très-incertaines.

En résumant les principaux résultats que je viens de faire connaître, on trouve que :

Au périgée, le baromètre est plus bas, la quantité de pluie est plus grande, le nombre de jours de pluie plus considérable ; les jours de *ciel couvert* sont plus fréquens et les ciels nuageux plus rares. Du périgée à l'apogée, le baromètre monte et la quantité de pluie diminue d'une manière régulière :

A l'apogée, le baromètre atteint son *maximum* de hauteur, la quantité de pluie est à son *minimum*, ainsi que le nombre de jours de pluie et de *ciel couvert ;* les *ciels nuageux* sont plus nombreux. De l'apogée au périgée, le baromètre baisse et la quantité de pluie augmente régulièrement.

Tous ces résultats s'accordent assez bien avec ceux qui ont été donnés par MM. *Flaugergues*, *Pilgram* et *Schübler*. Aussi doit-on en conclure que la lune, considérée dans sa révolution anomalistique, agit sur l'atmosphère terrestre. Cette influence est sans doute beaucoup plus petite ici que dans les révolutions synodiques ; mais je crois qu'il est cependant impossible de nier son existence. Si les résultats précédens ne sont pas tous aussi concordans, c'est que le nombre des observations employées ne suffit pas pour déterminer cette action lunaire. On

peut voir dans la planche II les diverses courbes données par le baromètre et la pluie.

Influence de la lune, considérée dans sa révolution équatoriale.

La lune fait sa révolution équatoriale en 27j,32. Comme précédemment, j'ai augmenté la durée de cette période et je l'ai portée à 28 jours, en ayant soin également de répéter les observations lorsqu'il le fallait. Dans les tableaux que j'ai formés, le 1er jour est le jour de l'équinoxe ascendant; de sorte que le 8e se trouve être à peu près le jour où la déclinaison boréale de la lune est à son *maximum*; le 15e représente le jour de l'équinoxe descendant, enfin le 22e est celui du *maximum* de déclinaison australe. La première observation est du 11 janvier 1810 et la dernière du 20 juin 1832. Le nombre des révolutions est de trois cents.

Après avoir pris les moyennes des hauteurs barométriques, je suis arrivé aux résultats suivans :

Jours lunaires.	Haut. barométri.	Jours lunaires.	Haut. barométri.	Jours lunaires.	Haut. barométri.	Jours lunaires.	Haut. barométri.
	mm		mm		mm		mm
1	756,490	8	756,107	15	755,773	22	755,475
2	755,985	9	755,707	16	755,906	23	755,576
3	755,451	10	755,705	17	755,760	24	755,615
4	755,796	11	755,716	18	755,535	25	755,574
5	756,081	12	755,461	19	755,783	26	755,871
6	756,124	13	755,909	20	756,089	27	756,179
7	756,019	14	755,942	21	755,868	28	756,424

Il y a dans ces hauteurs barométriques bien peu de régularité. Le *maximum* a lieu en effet au 1er jour et le *minimum* au 3e. La différence entre les deux est de $1^{mm},04$. J'ai cherché à déterminer d'une manière plus sensible les *maxima* et *minima*

des déclinaisons et des équinoxes, en prenant la moyenne des hauteurs barométriques de cinq en cinq jours. Les nouveaux résultats ont été tout aussi irréguliers :

ÉPOQUES LUNAIRES.	HAUTEURS barométriq^{s}.
	mm
Équinoxe ascendant	756,175
Maximum de déclinaison boréale	755,932
Équinoxe descendant	755,838
Maximum de déclinaison australe	755,725

On voit que le *maximum* arrrive à l'équinoxe ascendant ; le baromètre baisse ensuite au point extrême de la déclinaison boréale ; il baisse davantage encore à l'équinoxe descendant ; enfin le *minimum* a lieu au point extrême de la déclinaison australe. Il est évidemment impossible de tirer de là aucune conclusion.

Passons aux autres élémens que j'ai employés. Les observations de la pluie, des vents et de l'état du ciel remontent au 13 février 1804, et vont jusqu'au 1er décembre 1832. Cet espace de temps comprend 390 révolutions lunaires.

Ici, les résultats ne satisfont pas mieux : car le *minimum* d'eau tombée a lieu le 6e jour et le *maximum* le 7e. La différence entre ces deux nombres est de 0^{mm},72.

J'ai cherché de nouveau la quantité moyenne de pluie aux quatre époques principales. De cette manière, le premier *maximum* de pluie arrive à la déclinaison boréale où le baromètre a son second *maximum*. Le deuxième *maximum* d'eau a lieu à la déclinaison australe où se trouve le *minimum* du baromètre. Dans les deux cas, le nombre de jours de pluie est le même. Le *maximum* des hauteurs barométriques tombe

à l'équinoxe ascendant, où la pluie est presqu'aussi forte qu'à la déclinaison australe; car la différence n'est que de $0^{mm},07$, comme on peut le voir dans le tableau suivant :

ÉPOQUES LUNAIRES.	EAU TOMBÉE.	JOURS DE PLUIE.
	mm	
Équinoxe ascendant	1,31	660
Maximum de déclinaison boréale	1,50	667
Équinoxe descendant	1,29	633
Maximum de declinaison australe.	1,38	667

Je ne parlerai pas des résultats que j'ai tirés des vents et de l'état du ciel, ils sont encore plus discordans.

D'après ces détails, on peut se convaincre que si, dans sa révolution équatoriale, la lune a une influence quelconque, cette influence est tellement petite, qu'il faudrait un nombre d'observations beaucoup plus considérable, pour parvenir à la déterminer.

Je vais résumer la discussion des trois systèmes d'observations dont j'ai détaillé les principaux résultats.

La lune, considérée dans sa révolution synodique, a une influence qu'il est impossible de méconnaître. En effet, j'ai employé quatre élémens qui tous donnent aux mêmes époques des *maxima* et des *minima*, en rapport entre eux. Ces quatre élémens, comme on l'a vu, sont les hauteurs barométriques, la quantité d'eau provenant de pluie ou de neige fondue, les vents et l'état apparent du ciel. Ils dépendent, il est vrai, les uns des autres; mais les observations de quelques-uns sont tellement incertaines, je dirai même tellement arbitraires, qu'il est surprenant qu'ils aient pu s'accorder aussi bien avec les autres.

On sera forcé aussi de reconnaître que la lune, dans sa révolution anomalistique, a une influence sur notre atmosphère. Mais ici cette influence semble moins grande; car tous les

élémens ne sont pas aussi bien en rapport entre eux. Elle est donc plus difficile à déterminer, et les observations employées ne suffisent pas encore. Cependant mes principaux résultats s'accordent parfaitement avec ceux que M. *Arago* a insérés dans l'*Annuaire* de 1833.

Quant à la lune, considérée dans sa révolution équatoriale, si elle agit sur l'atmosphère terrestre, son action est tellement faible qu'elle ne pourra être donnée que par un bien plus grand nombre d'observations. Les élémens que j'ai discutés, non-seulement ne s'accordent pas entre eux, mais ils ne présentent même pas cette marche régulière que l'on trouve dans les deux premiers systèmes.

J'ajouterai ici quelques réflexions. La météorologie est encore dans l'enfance ; c'est de toutes les parties de l'astronomie physique la plus arriérée. A quoi cela tient-il ? à deux causes principales. La première, c'est que les instrumens dont on se sert, sont encore très-imparfaits ; la seconde, c'est que les méthodes d'observation sont tout-à-fait arbitraires, surtout pour les vents et l'état du ciel.

En effet, y a-t-il rien d'aussi incertain que les observations des vents ? Un observateur marque à telle heure que le vent est à telle direction ; il se guide pour cela sur une girouette divisée en quatre parties ; ou sur la marche des nuages ou enfin sur quelqu'autre indice, et cependant son observation est souvent très-inexacte, car il peut se tromper de 15 ou 20 degrés. Les erreurs sont encore bien plus grandes la nuit. On dit généralement que le vent dominant qui règne à Paris est celui de S.-O., tandis que c'est plutôt le vent d'O.

Lambert a donné, dans les *Mémoires de l'académie de Berlin* de 1777, une formule propre à déterminer la direction moyenne du vent. La voici :

$$\text{tang. Direction} = \frac{O - E + (SO + NO - SE - NE)\cos. 45^\circ}{S - N + (SO + SE - NO - NE)\cos. 45^\circ}.$$

Cette formule se déduit aisément de la décomposition des forces. J'en ai fait usage dans mes trois systèmes. J'ai supposé,

comme *Lambert*, l'horizon divisé en 360°. J'ai placé le vent du sud à 0°, le S. O. à 45°, l'O. à 90°, et ainsi de suite. J'ai trouvé les résultats suivans :

DIRECTIONS MOYENNES DIURNES DU VENT.

JOURS LUNAIRES.	RÉVOL. SYNOD.	RÉVOL. ANOMAL.	RÉVOL. ÉQUAT.
1	81° 16′	91° 21′	84° 5′
2	82, 10	96 50	73 0
3	80 46	96 7	84 16
4	76 40	92 41	92 18
5	71 38	87 33	101 30
6	73 43	81 48	71 42
7	90 18	63 53	65 34
8	59 32	79 15	64 3
9	69 4	68 58	71 43
10	66 30	50 43	84 57
11	68 6	64 58	86 46
12	72 29	66 2	84 59
13	63 22	65 55	87 43
14	79 15	61 1	89 28
15	120 18	77 35	79 25
16	81 49	82 6	67 7
17	69 33	85 7	67 32
18	79 13	78 10	63 47
19	84 44	83 14	90 43
20	80 47	76 51	87 43
21	76 7	83 46	61 12
22	74 50	68 13	69 56
23	75 54	78 42	72 2
24	140 5	85 37	75 9
25	69 30	71 54	69 38
26	82 24	82 57	77 46
27	81 29	81 50	81 5
28	87 27	94 25	93 36
29	80 14	—	—
30	84 23	—	—
MOYENNE. . .	80 7	78 29	78 32

La direction moyenne générale du vent, conclue des trois systèmes précédens, est par 79°, c'est-à-dire, entre le S. O. et l'O., mais bien plus rapprochée de ce dernier.

On sentira par là combien il serait important d'avoir des girouettes divisées, qui donnassent en même temps la force du vent; car la force et la direction du vent influent d'une manière très-sensible sur les hauteurs barométriques. Il serait utile aussi d'indiquer, autant que possible et approximativement, la direction des courans supérieurs.

Je ne m'étendrai pas sur les incertitudes des observations de l'état du ciel; chacun comprendra aisément qu'elles sont laissées au libre arbitre de celui qui observe.

Il faudrait, pour remédier à ces vices d'observation, qui sont de véritables entraves aux progrès de la science, il faudrait en quelque sorte établir des observatoires météorologiques, comme on a établi des observatoires astronomiques. Il faudrait en même temps former une société de météorologie qui arrêtât des règles générales d'observation. Alors on pourrait espérer des matériaux sûrs et nombreux; alors la science avancerait. On pourrait tirer parti des observations hygrométriques jusqu'aujourd'hui laissées de côté, ou ne donnant aucun résultat. On arriverait aussi à des faits curieux, par les observations électriques et magnétiques; car certainement l'électricité joue un très-grand rôle dans les phénomènes atmosphériques.

En terminant ce travail, je ferai une dernière remarqne qui a un rapport plus direct avec le sujet que je viens de traiter. Je veux parler du mot *influence*, dont je me suis servi très-souvent. Quand je dis que la lune a une influence sur l'atmosphère, je suis bien éloigné de lui attribuer tous les changemens de temps qui sont produits par des causes accidentelles et tout-à-fait différentes. Il y a loin d'une force qui ne paraît que dans une différence d'un ou de deux millimètres au plus en 23 ans, à une force qui fait quelquefois varier le baromètre de 8 ou 10 millimètres en vingt-quatre heures, et souvent sans que le ciel paraisse changer d'aspect. Or, si ces brusques changemens de temps, si ces variations énormes étaient dues à la

lune, son action se serait montrée d'une manière bien autrement sensible dans tous les résultats que j'ai obtenus. Que l'on ne cherche donc pas dans mes conclusions une argumentation en faveur des préjugés populaires.

Lettre de M. G. De Pontécoulant *au rédacteur sur le coefficient de la grande inégalité de Jupiter* (1).

« M. *Poisson*, dans son mémoire sur le *Développement des coordonnées des planètes*, etc., inséré dans la *Connaissance des temps* pour 1836, a rapporté, pag. 21, quelques observations que je lui avais communiquées au sujet du mémoire de M. *Hansen*, sur les inégalités de Saturne et Jupiter, couronné par l'Académie de Berlin. Ces observations, qui n'étaient pas destinées à être publiées, contenaient une comparaison entre quelques-uns des résultats obtenus par M. *Hansen*, et ceux de la *Mécanique céleste*; mais j'ai reconnu, depuis, que mon défaut d'habitude de la langue allemande, dans laquelle est écrit le mémoire dont il s'agit, m'avait fait tomber dans une grave erreur en donnant à certaines notations une autre désignation que celle que leur attribue l'auteur, et que j'avais été conduit ainsi à comparer entre elles des quantités qui ne sont pas analogues dans les deux ouvrages. J'ai eu dernièrement l'occasion de reprendre en entier la théorie des perturbations de Jupiter et de Saturne; elle paraîtra dans le troisième volume de la *Théorie analytique du système du monde*, en ce moment sous presse; j'ai déterminé les coefficiens de la grande inégalité par la méthode ordinaire du développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et j'ai ensuite comparé les valeurs de ces coefficiens à celles

---

(1) *Voyez* l'extrait d'une lettre adressée au rédacteur par M. *Hansen*, à la page 255 de ce volume.

que M. *Hansen* a déduites de la méthode des quadratures; permettez-moi de donner ici les résultats de cette comparaison, ce sera le meilleur moyen de réparer le tort bien involontaire que j'ai eu envers M. *Hansen*, et de détruire la prévention que la note insérée dans la *Connaissance des temps*, aurait pu faire naître contre l'exactitude de ses calculs.

En conservant les mêmes notations que l'auteur de la *Mécanique céleste*, et en n'ayant égard qu'aux termes de la fonction perturbatrice relatifs à la grande inégalité, soit (1) :

$$\begin{aligned} R = m' P \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + m' P' \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

En poussant les approximations jusqu'aux termes du cinquième ordre, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, j'ai trouvé pour 1800 :

$$a' P = 0{,}0000595577 \qquad a' P' = -\ 0{,}0010199583$$

$$a'^2 \frac{dP}{da} = -\ 0{,}0023331 3 \qquad a'^2 \frac{dP'}{da'} = -\ 0{,}0063036 1$$

$$a'^2 \frac{dP}{da'} = 0{,}00121274 \qquad a'^2 \frac{dP'}{da'} = 0{,}00445739$$

Désignons par g et g' les anomalies moyennes de Jupiter et de Saturne, en sorte qu'on ait

$$g = nt + \varepsilon - \omega \quad \text{et} \quad g' = n't + \varepsilon' - \omega'$$

et supposons que la fonction n, développée en série des sinus et cosinus de ces anomalies, contienne les termes suivans :

$$R = m'K \sin. (5g' - 2g) + m'K' \cos. (5g' - 2g)$$

---

(1) Les lettres non accentuées se rapportent à Jupiter, les lettres marquées d'un accent à Saturne.



On a d'ailleurs

$$nt + \varepsilon = g + \omega, \quad n't + \varepsilon' = g' + \omega'$$

en substituant ces valeurs dans la première expression de R, et en comparant ensuite, après l'avoir développée, dans cette expression et dans celle qui précède, les coefficiens des mêmes sinus et des mêmes cosinus, on aura :

$$\left.\begin{aligned} K &= P \cos.(5\omega' - 2\omega) - P' \sin.(5\omega' - 2\omega) \\ K' &= P \sin.(5\omega' - 2\omega) + P' \cos.(5\omega' - 2\omega) \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

et il est clair que les mêmes équations existeront entre les différences

$$\frac{dK}{da}, \frac{dK}{da'}, \text{ etc.}, \frac{dP}{da}, \frac{dP}{da'}, \text{ etc.}$$

D'après les valeurs de ω et ω' relatives à 1800, on a :

$$5\omega' - 3\omega = 63^\circ\ 26'\ 28''.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de P, P', $\frac{dP}{da}$, etc., rapportées plus haut, on trouve :

$$a'K = 0{,}000938956; \qquad a'K' = -0{,}000402768$$

$$aa'\frac{dK}{da} = 0{,}0025o584; \qquad aa'\frac{dK'}{da'} = -0{,}00267500$$

et en vertu de l'équation générale de condition :

$$a\frac{dK}{da} + a'\frac{dK}{da'} = -K$$

on en conclut :

$$a'^2 \frac{dK}{da} = -0,00344480; \quad a'^2 \frac{dK}{da'} = 0,00307777;$$

Voici maintenant les valeurs des mêmes quantités calculées par la méthode des quadratures, et extraites du mémoire de M. *Hansen*.

$$a'K = 0,000942079; \qquad a'K' = -0,0004023958$$

$$aa' \frac{dK}{da} = 0,00252078; \qquad aa' \frac{dK'}{da} = -0,00262946$$

$$a'^2 \frac{dK}{da'} = -0,00346286; \quad a'^2 \frac{dK'}{da'} = 0,00303186.$$

Ces valeurs s'éloignent très-peu, comme on voit, de celles que nous avons trouvées plus haut, et qui ont été déterminées d'une manière toute différente.

Si, au contraire, au moyen des équations (a), on déduit les valeurs de $a'P$, $a'P'$ et de leurs différences de celles des quantités

$$a'K, \; a'K', \; a'^2 \frac{dK}{da}, \text{ etc.},$$

en vertu des valeurs précédentes, on aura

$$a'P = 0,0000612864; \qquad a'P' = -0,0010225843$$

$$a'^2 \frac{dP}{da} = -0,00224621; \quad a'^2 \frac{dP'}{da'} = -0,00629075$$

$$a'^2 \frac{dP}{da'} = 0,001163620; \quad a'^2 \frac{dP}{da'} = 0,004453042.$$

La grande inégalité de Jupiter contient la partie suivante :

$$-\frac{6m'n^2a}{(5n'-2n)^2}\left(\begin{array}{l} a'P' \sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ -a'P\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right).$$

D'après les valeurs de n, n' et α rapportées dans la *Mécanique céleste*, et en adoptant la masse de Saturne résultante des tables de *Bouvard*, ce qui donne

$$m' = \frac{1}{3512},$$

on trouve :

$$\log. \frac{6m'n^2\alpha}{(5n'-2n)^2 \sin. 1''} = 6{,}0253350.$$

En vertu de cette valeur et de celles de P et P′, déduites des calculs de M. *Hansen*, la fonction précédente devient :

$$1084'',012 \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$$
$$-64{,}968 \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

En employant pour P et P′ les valeurs que j'ai données au commencement de cette note, la même fonction serait égale à

$$1089'',855 \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$$
$$-55'',204 \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Les différences de ces deux résultats sont dans les limites des quantités négligées dans le calcul, et peuvent d'ailleurs être attribuées à ce que les élémens que nous avons employés ne sont pas exactement ceux qui ont servi à la construction des tables de *Bouvard*, et qui entrent dans les calculs de M. *Hansen*.

La grande inégalité de Jupiter contient encore la partie suivante :

$$-\frac{2m'n\alpha^2}{5n'-2n}\left(\begin{array}{l} a'^2 \dfrac{dP'}{da} \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ -a'^2 \dfrac{dP}{da} \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 5\varepsilon) \end{array}\right)$$

En la réduisant en nombres, au moyen des valeurs de

$$a'^2 \frac{dP'}{da}, \quad a'^2 \frac{dP}{da},$$

calculées par les quadratures et en observant qu'on a :

$$\log. \frac{2m'na^2}{(5n'-2n)\sin. 1''} = 3,4140311$$

cette fonction devient

$$\begin{aligned}&-16'',3205 \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)\\ &+\ \ 5'',8275 \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).\end{aligned}$$

Par le développement en série nous avons trouvé pour la même fonction

$$\begin{aligned}&-16'',3538 \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)\\ &+\ 6'',0529 \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon),\end{aligned}$$

ce qui diffère peu de la valeur précédente.

La principale partie de la grande inégalité de Saturne, est la suivante :

$$\frac{15mn'^2}{(5n'-2n)^2}\left(\begin{array}{l} a'P' \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)\\ -a'P \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)\end{array}\right).$$

Par les valeurs rapportées dans la *Mécanique céleste*, et en supposant la masse de Jupiter égale à $\frac{1}{1053,924}$, on a

$$\log. \frac{15mn'^2}{(5n'-2n)^2 \sin. 1''} = 6,4193187.$$

En réduisant en nombres la fonction précédente, au moyen des premières valeurs de $a'\mathrm{P}$ et $a'\mathrm{P}'$, rapportées plus haut, j'ai trouvé qu'elle était égale à

$$\begin{aligned}&-2678'',5573 \sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\&+\ \ 156'',4072 \cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon);\end{aligned}$$

en employant les valeurs déduites des calculs de M. *Hansen*, on trouverait cette même fonction égale à

$$\begin{aligned}&-2685'',4543 \sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\&+\ \ 160'',9470 \cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).\end{aligned}$$

Les différences entre ces résultats sont très-légères.

Enfin la grande inégalité de Saturne contient la partie suivante :

$$-\frac{2mn'}{5n'-2n}\left(\begin{array}{l}a'^2\dfrac{d\mathrm{P}}{da'}\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\-a'^2\dfrac{d\mathrm{P}'}{da'}\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right).$$

On a par ce qui précède :

$$\log.\frac{2mn'}{(5n'-2n)\sin.1''}=4,0684516.$$

En réduisant la fonction précédente en nombres, d'après les valeurs de

$$a'^2\frac{d\mathrm{P}}{da'},\quad a'^2\frac{d\mathrm{P}'}{da'},$$

que j'ai calculées, on trouve qu'elle est égale à

$$\begin{aligned}&52'',1834 \sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\&-14'',1977 \cos.(5n't-2nt+5\varepsilon-2\varepsilon),\end{aligned}$$

et en faisant usage des valeurs déduites des calculs de M. *Hansen*, cette fonction serait égale à :

$$52'',1325 \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$$
$$-13'',6226 \cos. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Les différences sont très-légères.

Ainsi, comme on voit, les résultats de mes nouveaux calculs se rapprochent beaucoup de ceux qu'on obtient en faisant usage des valeurs calculées par M. *Hansen*, et la comparaison que nous avons établie entre eux, laisse beaucoup moins à désirer sous ce rapport, que celle qu'on avait faite de ces résultats à ceux de la *Mécanique céleste*, rapportés à l'époque de 1800. Il en résulte donc une nouvelle confirmation de l'exactitude des opérations de M. *Hansen*, et c'est une justice que nous aimons à rendre aux travaux consciencieux de cet estimable géomètre. Au reste, sur la demande qui m'en a été faite par plusieurs membres du bureau des Longitudes, je m'occupe en ce moment d'une analyse des différens mémoires publiés par M. *Hansen*, sur la *Théorie des perturbations planétaires*; elle sera insérée dans la prochaine *Connaissance des temps*, et je contribuerai, j'espère, par ce moyen, à propager les méthodes nouvelles qu'il a proposées pour cet objet, et les importans résultats auxquels il est parvenu.

Agréez, etc.

Paris, le 15 septembre 1834.

Nouvelles piles thermo-électriques de M. Nobili.

Le premier de ces instrumens, que M. *Nobili* nomme *pile à rayons*, se compose d'un certain nombre de couples thermo-électriques de bismuth et d'antimoine, disposés en rayons autour d'un centre commun, et dans un même plan. Chacun

de ces couples est terminé par une pointe très-fine dirigée vers le centre du système, mais maintenue à une distance de ce point suffisante pour l'isolement des couples en cet endroit. Les communications d'un couple à l'autre s'établissent à la circonférence, au moyen de petits arcs de bismuth ou d'antimoine, soudés aux points convenables ; on a soin de ne pas fermer le circuit, de manière que deux élémens, l'un de bismuth, l'autre d'antimoine, demeurent libres, et forment les deux pôles destinés à recevoir les fils du galvanomètre.

Cet assemblage est attaché avec du mastic sur un disque mince en bois, percé dans le milieu pour laisser les pointes à découvert, et le tout est renfermé dans une boîte circulaire de laiton, percée également au centre, des deux parts. À l'une des couvertures de la boîte est adapté, dans le sens de l'axe de l'instrument, un tube de laiton fermé par un couvercle ayant à son centre un petit trou qui permet de voir le centre de la pile, et de la diriger au point convenable. Ce trou doit être assez petit pour que le calorique de l'œil ne puisse agir sensiblement sur la pile ; on peut, pour plus de sûreté, couvrir cette petite ouverture d'une lame mince de mica ou de sulfate de chaux.

La boîte de laiton porte latéralement un petit appendice terminé par une vis, de manière à pouvoir se fixer à différens supports.

Enfin, pour pouvoir restreindre à volonté l'ouverture par laquelle les rayons calorifiques doivent parvenir aux pointes thermo-électriques, on adapte à la boîte un secteur à charnière, percé de plusieurs trous de différens diamètres, qui peuvent se placer successivement devant le centre de l'instrument. Quatre trous de 3, 6, 9 et 12 millimètres de diamètre suffisent pour tous les cas.

Cette pile a sur les autres les avantages suivans :

1° A nombre égal d'élémens, ses effets sont plus intenses ;

2° Elle éprouve plus rapidement l'influence du calorique, et revient aussi plus rapidement à sa première température ;

3° Les ouvertures centrales de l'instrument permettent de

le diriger exactement au point convenable, et de ne pas perdre de vue l'effet lumineux lorsqu'il est accompagné d'un effet calorifique ;

4° Son ouverture se réduit à volonté, le même nombre d'élémens restant toujours en présence de la source calorifique ;

5° Enfin, cette pile, propre d'ailleurs à tous les usages ordinaires, est la seule qui convienne pour certaines recherches, telles que celles qui ont pour objet la concentration des rayons calorifiques.

A l'aide de cet instrument, M. *Nobili* a fait une série d'expériences dont voici les principales :

1° Sans connaître le résultat obtenu précédemment par M. *Melloni* : savoir, que le calorique rayonnant ne se polarise pas en traversant la tourmaline, M. *Nobili* est arrivé à la même conclusion. Il a montré de plus que le calorique ne se polarisait nullement par réflexion, ni sur les surfaces polarisantes ordinaires, ni sur les surfaces métalliques. Il se propose, du reste, de revenir de nouveau sur ce sujet en cherchant à accroître encore la force et la précision de ses appareils.

2° Il a fait passer à travers une lentille de sel gemme, les rayons émanés d'un cube de fer chaud, mais parfaitement obscur, et il a prouvé que ces rayons se concentraient en un foyer, à la manière des rayons lumineux ;

3° En substituant au cube de fer, la flamme d'une lampe d'Argant, et en plaçant devant l'ouverture de la pile un petit obstacle métallique d'une grandeur précisément suffisante pour intercepter les rayons lumineux émanés de la flamme, M. *Nobili* a obtenu encore une légère déviation de l'aiguille, déviation due aux rayons de calorique obscur, qui étant moins réfrangibles que les rayons lumineux, passent à côté de l'obstacle.

M. *Nobili* a décrit un second instrument, qu'il nomme *pile à biseaux*, et qu'il destine aux expériences sur l'interférence des rayons calorifiques. Pour concevoir la construction de cette pile, supposons que l'on forme d'abord un certain nombre de couples thermo-électriques, composés chacun d'un élément de

bismuth et d'un autre d'antimoine attachés bout à bout en ligne droite ; supposons ensuite qu'on soude tous ces couples l'un à l'autre par l'une de leurs extrémités, en alternant toujours les deux métaux, et en donnant au système la forme d'un zig-zag suffisamment serré et contenu dans un même plan. Il est évident que, par cette disposition, toutes les jonctions paires se trouveront aux angles du zig-zag, tandis que les jonctions impaires seront placées sur une même ligne droite qui partage tout le système en deux parties égales : c'est sur cette ligne que doivent agir les rayons calorifiques. Ces rayons, dans les expériences auxquelles l'instrument est destiné, partent d'une source linéaire, telle qu'un fil métallique chaud. Les élémens de cette pile sont très-déliés : un semblable zig-zag composé de 8 couples n'occupe en hauteur que 15 millimètres : on conçoit du reste que les différentes lignes du zig-zag doivent laisser entre elles un petit intervalle.

La monture de cet instrument consiste en une boîte rectangulaire qui s'ouvre et se ferme à l'aide de deux lames qui peuvent se rapprocher ou s'éloigner, à la manière de celles dont se compose l'instrument de s'Gravesande pour la diffraction. On peut, par ce moyen, réduire à volonté l'ouverture de la pile. La face opposée de la boîte est percée d'une fente étroite correspondante à la ligne des jonctions impaires ; cette ouverture sert à diriger l'instrument ; elle est fermée par une lame de mica ou de sulfate de chaux, pour garantir la pile du calorique de l'œil.

Les expériences faites antérieurement par M. *Matteucci*, sur les interférences des rayons calorifiques, ne paraissant pas concluantes à M. *Nobili*, ce dernier physicien se propose de faire, à l'aide de l'instrument que nous venons de décrire, de nouvelles recherches sur cet objet.

Notice sur Martin Dorpius, Van den Dorp ou Van Dorp; par M. le baron De Reiffenberg, professeur à l'université de Louvain.

Quoique *Martin Dorpius* ait cultivé plus spécialement la littérature, il appartient cependant à notre galerie scientifique, puisque *Adrien Barlandus*, dans sa *Chronique des ducs de Brabant*, le représente comme un physicien consommé : *physices arcana pervestigaverat,* ce qui prouve qu'au seizième siècle, au siècle de la renaissance, il n'y avait point entre les sciences et les lettres ce divorce complet qui tend à fausser les unes et les autres et à rétrécir les esprits les plus vastes et les plus généreux.

Dorpius, qui enseigna avec éclat à l'université de Louvain, y prononça, le 1[er] octobre 1513, à la reprise des cours, un discours qui contient un éloge de chaque branche de l'arbre encyclopédique et celui de l'université de Louvain en particulier. C'était un lieu commun; mais tout ce qui est juste et vrai finit par devenir lieu commun, comme les mots heureux passent en proverbe.

Dans ce discours, réimprimé par l'abbé *De Nélis* à l'imprimerie académique, fondée à Louvain par le comte de *Cobentzl*, et destiné à faire partie d'un recueil d'*analectes*, qui n'a point paru et dont les feuilles sont une véritable rareté bibliographique; dans ce discours, dis-je, la géométrie, qui marche après la musique, laquelle est précédée de l'arithmétique, l'astronomie et la physique sont traitées avec le plus grand honneur. Il est vrai que l'auteur paie tribut aux préjugés de son temps à propos de l'astronomie, puisqu'il la met au service de la médecine et de la chirurgie : *prædicit idem quo tempore quod membrum aut noxium sit, aut salutare, incidere ferro; quo minuendus sanguis; quandò efficaces sint futuræ potiones, quandò perniciosæ.* Ce passage rappelle ces vers inscrits en tête des anciens calendriers, où, en faisant la part de l'ignorance et du ridicule, on pouvait découvrir cependant quel-

ques observations pratiques qui n'étaient pas dénuées d'une certaine vérité :

Piscis habens lunam, noli curare podagram,
Nil capiti noceas, aries, cum luna refulget;
Non tangas aures : sed balnea tutius intras;
Nec cephalam minuas, nec barbam radere debes.
Majus amat medicos et balnea, et scindere venas.

Pierre Bruhezius composa, vers l'an 1550, à l'usage de la ville de Bruges, un *Grand et perpétuel Almanach*, très-exactement réglé sur les principes de l'astrologie judiciaire et dans lequel il déterminait, avec beaucoup de précision, les momens convenables pour purger, pour prendre des bains, se saigner et se faire la barbe. Le magistrat goûta extrêmement ce dernier article : en conséquence, il ordonna à tous ceux qu'il appartiendrait, de se conformer ponctuellement à l'almanach de maître Bruhezius, faisant très-expresses inhibitions et défenses à quiconque exercerait dans Bruges le métier de la barberie, de rien entreprendre sur le menton de ses concitoyens, durant les jours fatals. Cette ordonnance, toute grave qu'elle était, trouva des frondeurs; et un autre médecin de Bruges, *François Rapaert* ou *Rapardus*, osa publier :

Magnum et perpetuum almanach, à consuetis nugis liberum, adeòque verè medicum, de phlebotomiâ, de balneis, de purgationibus, etc., certiora præcepta continens ; ut meritò dici possit vulgarium prognosticôn medicorum, empiricorum et medicastrorum flagellum. Antv. Joan. *Latius*, 1551, in-12.

Rapaert avait incontestablement la raison pour lui, aussi le public fut-il pour son adversaire, qui trouva en outre un défenseur dans un de ses confrères, *Pierre Haschaert* ou *Haschardus*, qui mit au jour l'ouvrage suivant :

Clypeus astrologicus, contra flagellum astrologorum Hr. Rapardi, Brugensis medici, cum declaratione et approbatione utilitatis astrologiæ. Lov. Anton. Maria Bergagne, 1552, in-12.

Dorpius était donc bien excusable de donner dans une faiblesse si générale : *Hæc*, ajoute-t-il, *quamvis scioli quidam rideant, tamen res ipsa reclamat, et quotidiana docet experientia,*

esse veriora veris. Mais s'il ne put se tenir en garde contre les communes erreurs de son siècle, il a devancé sur divers points les modernes. Ainsi, en parlant de la physique, il ne manque pas de dire qu'elle explique comment *il tombe du ciel des pierres, des grenouilles, de la terre*, etc. *Quî fiat ut pluant lapides*, *ranæ*, *terra*, etc. Sur quoi M. *de Nélis* se demande ridiculement si ce phénomène a jamais lieu. Il était donc moins avancé au dix-huitième siècle que le docteur du seizième.

Au reste, la science en faisant des progrès, confirme quelquefois les témoignages attribués à la crédulité ignorante. On ne met donc plus au rang des fables d'*Hérodote*, son récit de la chûte d'une pierre, et on a cessé de reprocher aux vieux chroniqueurs de semblables allégations dont riait bien mal à propos l'abbé de *Nélis*. *Molinet*, par exemple, dans sa *Récollection des Merveilleuses*, a inséré cette strophe :

Jay veu et leu en livres
Dune pierre pesant
Deux cens soixante livres
Montaignes traversant;
Du ciel par ung tonnoire,
Comme il me fut conté,
Cheut ceste pierre notre
En Ferret (*Ferrette*) la conté.

Nos historiens citent plus d'une fois de pareils prodiges, et j'ai recueilli ailleurs ce qu'ils en rapportent.

Dorpius, né à Naeldwyck, mourut en 1525, le 31 mai. Il avait enseigné d'abord au collége du Lys, à Louvain. M. *Marron*, qui a fait son article, dans la *Biographie universelle*, s'est imaginé que ces mots *in Liliensi pedagogio* voulaient dire que *Dorpius* avait professé à Lille. C'est ainsi que, dans la même *Biographie*, le savant *Boissonnade*, à propos de *François Burmann*, traduit *collegium ordinum* (le collége de leurs hautes puissances ou des états-généraux), par l'*Académie des ordres !* Mais les plus habiles tombent dans ces méprises, et il n'y a que ceux qui ne font rien qui ne se trompent jamais.

Pour rédiger cette notice, on a consulté *Valère André*, *Sweertius*, *Aubert le Mire*, *Barlandus*, *Sanderus*, *Nic-Nicolaius*, *Foppens*, le *Dictionnaire de Médecine d'Éloy*, la *Biographie universelle*, les *Analecta* de *Nelis*, les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, etc.

Notice systématique des ouvrages qui traitent spécialement de la statistique des Pays-Bas ou de la Belgique, ou bien qui peuvent servir de sources pour cette statistique; par M. Tandel, lecteur à l'Université de Louvain.

I. STATISTIQUE GÉNÉRALE.

A. DE TOUT L'ÉTAT.

Herbin, etc. — Statistique générale et particulière de la France (Voir les départemens belges), 7 vol. in-8°, — Paris, 1803.

Van Kampen. — Staat- en aardrijkskundige beschrijving van het koninkrijk der Nederlanden, 1 vol. in-8°. — Haarlem, 1816.

Peuchet et *Chanlaire.* — Description topographique et statistique de la France, jusqu'en 1815, 52 cahiers in-4°. — Paris. (Voir les départemens belges.)

B. STATISTIQUE GÉNÉRALE PROVINCIALE OU LOCALE.

Viry. — Mémoire statistique du département de la Lys. — Paris, 1804.

De Graaff. — Historisch statistische beschrijving van het departement Brabant, 3 stukken, in-8°. — Amsterdam, 1807.

Mémoires adressés au ministre de l'intérieur, par MM. les préfets des départemens. — Paris. (Voir les départemens belges.)

Vanden Bogaerde. — Het distrikt Sint-Nikolaas, voorheen het land van Waes, 3 vol, in-8°. — St.-Nicolas, 1825. (Bulletin de Férussac, v, 27.

Paridaens. — Mons, sous les rapports historique, statistique, de mœurs, littérature et beaux-arts.

II. STATISTIQUE SPÉCIALE.

A. STATISTIQUE MATÉRIELLE.

1° Statistique du sol. (Étendue et état naturel.)

Voir les *Mélanges*, nos 8, 12 et 15.

Quetelet et *Smits.* — Recherches sur la reproduction, etc., p. 98. (Voir II, A, 2° a.)

Somerhausen. — Carte figurative des proportions statistiques du royaume des Pays-Bas. — Bruxelles, 1828. (Corresp. math., no 73.)

D'Omalius d'Halloy. — Mémoires pour servir à la description géologique des Pays-Bas, de la France et de quelques contrées voisines, in-8°, avec carte géolog. color. et une planche de coupes. — Namur, 1828. (Bulletin, etc., XX, 153.)

Steinenger. — Descriptiou géologique du grand-duché de Luxembourg, in-4°. — Bruxelles, 1829.

Engelspach-Larivière. — Description géognostique du grand duché de Luxembourg, suivie de considérations, etc. — Bruxelles, 1828. (Bulletin, etc., XX, 154.)

Cauchy. — Mémoire sur la constitution géologique de la province de Namur.

Davreux. — Essai sur la constitution géognostique de la province de Liége, in-4°. — Bruxelles, 1828.

Drapiez. — Coup-d'œil minéralogique sur le Hainaut; ce mémoire et les quatre précédens se trouvent dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, (*Revue encycl.*, XIX, 153.)

Kickx. — Mémoire sur la géographie physique du Brabant

méridional ; dans les *Mémoires de l'Acad. de Bruxelles*, II, 315. (Bulletin, etc., XX, 155).

Le même. — Observations météorologiques faites à Bruxelles, dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, II, 298 ; III, 513 ; IV, 495 et V.

Hocquart. — Flore du département de Jemmappes, *in*-12. — Mons, 1814.

2°. STATISTIQUE DU PEUPLE,

a. Grandeur numérique (population : dénombrement, rapports, mouvement) *et physique*.

Lettre de M. Quetelet à M. Villermé, sur les rapports de la population aux décès, aux naissances, aux mariages, etc., dans les Pays-Bas. (*Corresp. math.* II, 170.)

Note sur les lois des naissances et des décès dans les Pays-Bas, 1825, (*Corresp. math.*, III, 40.)

Table de mortalité, pour les provinces méridionales, dans la *Corresp. math.*, III, 43.

Mouvement de la population dans le royaume des Pays-Bas, pendant les années 1815 à 1824 inclus ; Recueil de tableaux publiés par la commission de statistique, créée par l'arrêté de S. M. du 3 juillet 1826, in-4° — La Haye, 1827. (*Corresp. math*, III, 246.)

E. Smits. — Statistique nationale. Développement des 31 tableaux publiés par la commission de statistique et relatifs au mouvement, etc., in-8° — Bruxelles, 1827. (*Corr. math.*, III, 262 ; *Bulletin*, etc, XVIII, 54 et 55.)

Mouvement de la population dans le royaume des Pays-Bas pendant 1826 ; dans la *Corresp. math.*, IV, 194.

Calcul approximatif de la population des Pas-Bas (1829), dans la *Corresp. math.*, V, 128.

Second recueil de tableaux, publiés par la commission générale de statistique, in-8° — La Haye, 1829. (*Rev. encycl.* XLVIII, 328.)

Quetelet. — Recherches sur la loi de croissance de l'homme,

in-4° — Bruxelles 1831. (*Revue encyclo.* juillet 1831, p. 153.)

Quetelet et *Smits.* — Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différens âges et sur la population de la Belgique, in-8° — Bruxelles, 1832.

Quetelet. — Mémoire sur la loi des naissances et de la mortalité à Bruxelles, lu à l'Académie royale de Bruxelles, le 25 avril 1825. (*Bulletin*, etc., VII, 93; XIII, 247.)

Sur la courbe des naissances (Bruxelles), dans la *Corresp. math.*, I, 16. (*Bulletin*, etc., XI, 53.)

Sur la loi de mortalité à Bruxelles, dans la *Corresp. math.* I, 78 et 217. (*Bulletin*, etc., XI, 54.)

Rapports de la population aux décès, aux naissances, aux mariages, à Tournay, dans la *Corresp. math.*, II, 178 et 230. (*Bulletin*, etc., XI, 56.)

Sur les naissances et les décès aux différentes heures du jour, à Bruxelles (1811-1822, dans la *Corresp. math.*, III, 41, (*Bulletin*, etc., XI, 61.)

Voir les *Mélanges*, nos 718 et 10.

b. Economie publique, *travail du peuple* (agriculture, ateliers, commerce), *richesses* (institutions d'utilité publique).

a a. AGRICULTURE.

Schwarz. — Anleitung zur kenntniss des belgischen Landwirthschaft, 3 vol., in-8°. — Halle, 1807 — 11.

Les états de l'agriculture dans le royaume des Pays-Bas, publiés annuellement à La Haye (par ordre du ministre de l'intérieur), par J. Kops.

Radcliff. — A report on the agriculture of eastern and western Flanders, in-8°. — London, 1819.

Journal d'agriculture, d'économie rurale et des manufactures des Pays-Bas. — Bruxelles.

Enquête sur l'état des paysans de la commune de Gaesbeek, par le comte Arrivabene, dans le *Recueil enc. belge*, IV, 221.

Voir les *Mélanges*, nos 5, 9 et 12.

COLONIES AGRICOLES.

Keverberg (Bon de) de la colonie de Fredericks-oord et des moyens, etc. — Gand, 1821.

Rapport sur la colonie libre de Wortel. — Bruxelles, 1er septembre 1824. (*Bulletin*, etc., IV, 154.)

Vander Willingen. — Rapport succint sur les colonies de la société de bienfaisance ; dans l'Algem. Konst- en- letterbode, du 11 août 1826. (*Bulletin, etc.*, XII, 79.)

Kirckhoff. — Mémoire sur les colonies de bienfaisance de Frederiks oord et de Wortel, in-8° — Bruxelles, 1827. (*Bulletin, etc.* XII, 77; *Revue encycl.*, XXXVII, 264 et 480.)

An account of the poor-colonies, etc., of the benevolent society of Holland, by a member of the Highland society of Scotland, in-12. — Edinburgh, 1828.

Mary. — Voyage aux colonies agricoles, érigées par les sociétés de bienfaisance du royaume des Pays-Bas, in-8° — Bruxelles, 1829 (*Revue encycl.*, XLII, 453.)

bb. ATELIERS. (*Fabriques*, etc.).

Le Guide aux manufactures, ou exposition générale des produits de l'industrie nationale du royaume des Pays-Bas, in-12, 2e édit. — Bruxelles, 1826. (Ce livre n'est qu'une nomenclature des principaux fabricans et artisans du pays.)

Voir les *Mélanges*, nos 5, 9, 10 et 11.

Données statistiques sur les machines à vapeur importées d'Angleterre en 1825, 26 et 27 ; dans la *Corresp. math.*, V, 199.

L'Industriel, ou revue des revues, bulletins, etc., par une société ; recueil in-8° — Bruxelles, 1829.

cc. COMMERCE.

Vandermaelen. — Tableau statistique des patentables de la Belgique, d'après des documens officiels, in-8° — Bruxelles, 1824.

Voir les *Mélanges*, nos 2, 5, 8 et 11.

Lecocq. — Coup-d'œil sur la statistique commerciale de la ville de Tournay et de son arrondissement, in-8o — Tournay, 1817.

Statistique du commerce maritime de la place d'Anvers, pendant les six dernières années (1826 — 1833).

c. RICHESSES. (*institutions d'utilité publique.*)

Rapports adressés annuellement aux États-Généraux sur la situation des établissemens de bienfaisance, etc. — La Haye.

Sur les institutions pour les secours dans les Pays-Bas, en 1826; dans la *Corresp. math.*, IV, 341.

Voir les *Mélanges*, no 8.

(Voir les ouvrages sur les colonies agricoles.)

Ducpétiaux. — Rapport sur l'état actuel des prisons en Belgique, etc., in-8o — Bruxelles, 1834.

Le même. — Des modifications à introduire dans la législation relative aux enfans trouvés en Belgique, in-8o — Bruxelles, 1834.

Keverberg (baron de). — Essai sur l'indigence dans la Flandre orientale, in-8o — Gand, 1819. (*Revue encycl.*, IV, 429.)

Secours aux individus noyés dans le ressort de Bruxelles, de 1819-1828; dans la *Corresp. math.*, V, 265 et 401.

Ducpétiaux. — Rapport sur l'organisation du quartier des jeunes détenus à Saint-Bernard, in-8o de 16 pages. — Bruxelles, 1834.

Société de commerce néerlandais, fondée par l'arrêté du 29 mars 1824. (Bulletin, etc., II, 141.)

Canaux des Pays-Bas. (*Bulletin*, etc., XI, 64.)

Voir les *Mélanges*, no 9 et 11.

Le Philanthrope, recueil publié par ordre de la commission permanente de la société de bienfaisance, etc. — Bruxelles, commencé en 1822. (Bulletin. etc., XII, 76.)

3°. STATISTIQUE DU GOUVERNEMENT. — (*Économie de l'État : domaines, finances.*)

Cohen. — Compendium of finance, containing an account of the origin, progress and present state of public debts, revenue, expenditure, national banks and currencies of 16 states of the old et new world (y compris les Pays-Bas), in-8°. — London, 1822.

Schmidts. — Histoire raisonnée des fonds publics de tous les états de l'Europe et de l'Amérique, t. I, in-4° (relatif aux Pays-Bas). — Amsterdam, 1824.

Exposé historique des finances des Pays-Bas depuis 1813 (par Osiander), trad. de l'allem. — Bruxelles, 1829, in-8°.

Van Breugel. — Esquisse historique et élémentaire sur la contribution foncière et le cadastre, in-8°. — Bruxelles, 1828.

Voir les *Mélanges*, nos 7 et 8.

Le Normant. — Description de la maison de force à Gand, in-8°. — Gand, 1828. (*Bulletin*, etc., XVII, 243.)

B. STATISTIQUE INTELLECTUELLE.

1°. STATISTIQUE DU PEUPLE.

a. Religion. (Statistique de l'Église, constitution, organisation, administration.)

Bouquié. — Almanach du clergé catholique romain des Pays-Bas, in-8°. — Bruxelles.

Mémorial administratif du diocèse ou archevêché de Malines, comprenant toutes les paroisses de chaque arrondissement et canton des provinces d'Anvers et du Brabant, etc., in-8°. — Malines, 1820.

b. Mœurs, moralité. (Crimes et délits, procès-civils. — Statistique des tribunaux).

Du nombre des crimes et des délits dans les provinces du Brabant méridional, du Hainaut, des deux Flandres et d'Anvers, pendant les années 1826—28; dans la *Corr. math.*, V, 177.

Voir les *Mélanges*, no 8.

Quetelet. — Recherches sur le penchant au crime aux différents âges, in-8°. — Bruxelles, 1831.

Quetelet et Smits. — Statistique des tribunaux de la Belgique, pendant les années 1826—30, in-4°. — Bruxelles, 1833.

Ducpétiaux. — Comparaison entre la criminalité et la moralité des provinces flamandes et des provinces wallonnes; dans le *Messager des sciences et des arts*, II, 164.

c. Intelligence. (Sciences, arts, instruction populaire. — Statistique des écoles et de la littérature.)

Collot d'Escury. — De l'état actuel des arts et des sciences dans les Pays-Bas, t. I, in-8°. — Leyde, 1826. (*Rev. encycl.* XXXIII, 200.)

Rapports adressés annuellement aux états-généraux sur l'état des écoles inférieures, moyennes et supérieures. — La Haye.

Somerhausen. — Carte figurative de l'instruction populaire dans les Pays-Bas. (*Corr. math.*, III, 253; *Bulletin*, etc., XII, 179; *Rev. encycl.* XXXVII, 738.)

État de l'enseignement dans les Pays-Bas en 1827; dans la *Corr. math.* V, 396.

Voir les *Mélanges*, nos 8, 10 et 11.

Obstacles à l'instruction populaire en Belgique; dans le *Sophronizon*, 1826, vol. VIII, cah. 2. (*Bulletin*, etc., XII, 178.)

Notice sur l'instruction populaire dans la province de Namur; dans *le Globe* du 4, 8 et 20 septembre 1827.

Quetelet. — De la possibilité de mesurer les causes qui modifient les élémens sociaux; *Lettre à M. Villermé*, in-8°. — Bruxelles, 1832.

Journaux des provinces méridionales des Pays-Bas, en 1828 ; dans la *Corr. math.*, IV, 192.

Industrie typographique des Pays-Bas, en 1827. (*Bulletin*, etc., XXVIII, 155.)

Revue numérique des ouvrages publiés dans les Pays-Bas en 1825, 26 et 27 ; dans la *Corr. math.*, IV, 140.

Imprimerie et lithographie à Bruxelles, de 1815—28 ; dans la *Corr. math.*, IV, 261.

2°. STATISTIQUE DU GOUVERNEMENT.

a. Constitution, organisation constitutionnelle.

Pas d'ouvrages.

b. Administration.

aa. Administration communale.

Pas d'ouvrages.

bb. Administration publique.

Handleiding tot de kennis van het staatsbestuur in het koninkrijk der Nederlanden, enz., 3 vol., in-8°. — Dortrecht, 1829.

Staats-Almanak. — 's Gravenhaag.

Gosselin. — Alphabetische naamlijst der gemeenten en derzelver onderhoorigheden, 2 vol., in-8°. — Amsterdam, 1827. (*Bulletin*, etc., VII, 193 ; X, 29 ; XIX, 277.)

Voir les *Mélanges*, nos 4, 5, 9, 10 et 11.

Dessevael. — Aperçu historique des dispositions royales concernant l'administration des dépenses de l'état dans les Pays-Bas, traduit du holl., in-8°. — Amsterdam, 1822.

Code administratif de la province de Namur, 2 vol., in-8°. — Namur, 1827.

Recueil politique et administratif pour la province de Liége, in-12. — Liége, 1829.

Almanach de la province de Liége et de la cour supérieure de justice de Liége.

Exposé sur la situation de la province du Hainaut, sous le rapport de son administration, présenté aux états-provinciaux. Années 1828 et 1829. (*Rev. encycl.* XLIV, 790; XLIX, 165; *Corr. math.*, V, 356.)

Même exposé pour les autres provinces.

c. *Législation.*

Pas d'ouvrages.

III. MÉLANGES.

1. *Hoogendorp* (*K. van*). — Bijdragen tot de huishouding van staat in het koninkrijk der Nederlanden, 10 vol., in-8°. — La Haie, 1818 et suiv.

2. *Van Esse.* — Description géographique et commerciale du royaume des Pays-Bas, in-8°. — Anvers, 1819.

3. *De Cloet.* — Géographie physique, historique et statistique du royaume des Pays-Bas et de ses colonies, 2e édition, in-8°, — Bruxelles, 1822.

4. *De Bouge.* — Manuel géographique, statistique et administratif des Pays-Bas, 1re partie, in-8°. — Bruxelles, 1821.

5. *De Cloet.* — Manuel de l'administrateur, du manufacturier et du négociant, ou tableau statistique de l'industrie des Pays-Bas, 2e édition, in-8°. — Bruxelles, 1824. Traduit en holl. et augmenté par Van Griethuizen. — Utrecht, 1826.

6. Observations sur l'ouvrage précédent, par M. P., cultivateur, in-8°. — Bruxelles, 1824.

7. *Quetelet.* — Recherches sur la population, les naissances, les décès, les prisons, les dépôts de mendicité, etc., mémoire

lu à l'Académie royale de Bruxelles. — Bruxelles, 1827. (*Bulletin*, etc., XVIII, 52; *Rev. encycl.*, XXXV, 405; XXXVII, 158.) Réimprimé in-8°.

8. Le même. — Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas, lues à l'Académie royale de Bruxelles, le 6 décembre 1828. — Bruxelles, 1829 (*Rev. encycl.*, XLII, 175.), et in-8°.

9. *Vander Maelen.* — Dictionnaires géographiques des provinces de Liége, de Namur, de Hainaut, d'Anvers et de la Flandre orientale, 5 vol., in-8°. — Bruxelles, 1831—34.

10. Le même. — Recueil de documens statistiques, in-8°. — Bruxelles, 1833.

11. Le même. — Annuaire industriel et administratif de la Belgique, années 1832 et 1833. — Bruxelles.

12. *Courtois.* — Recherches sur la statistique physique, agricole et médicale de la province de Liége, 2 vol., in-8°. — Verviers, 1828. (*Corr. math.*, IV, 198 et 398; *Rev. encycl.*, XLI, 201; *Bulletin*, etc., XX, 156.)

13. Jaarboekje, uitgegeven op last van Z. M. den koning. — La Haie, commencé en 1826.

14. Annuaire de la province de Limbourg, rédigé par la société des amis des sciences, lettres et arts, établie à Maestricht, in-12. Commencé en 1822.

15. Annuaire de l'observatoire de Bruxelles, par A. Quetelet, commencé en 1834.

VOYAGES.

Van Meteren, geboren *Schilperoort.* — Reis door het koninkrijk der Nederlanden, in-8°. — Amsterdam, 1823.

Guide des voyageurs dans les Pays-Bas et le grand-duché du Rhin, etc., 13e édition, in-12. — Bruxelles, 1826.

Grouner. — Reise durch des konigreich der Niederlande, welche auf veranlassung des landwirthschaftlichen vereins in Baiern gemacht worden, 2 vol., in-8°. — Passau, 1826.

Itinéraire du royaume des Pays-Bas, orné de cartes, 2 vol., in-12. — Amsterdam, 1826. (*Rev. encycl.*, XXXII, 699.)

Aperçu synoptique du système.

- (I) Statist. générale
  - (*A*) de tout l'état.
  - (*B*) provinciale ou locale.
- (II) *Statistique spéciale.*
  - (*A*) Stat. matérielle
    - 1° Du sol : grandeur, caractère.
    - 2° Du peuple.
      - (*a*) Grandeur numérique et physique.
      - (*b*) Travail.
        - (*aa*) Agriculture.
        - (*bb*) Ateliers.
        - (*cc*) Commerce.
      - (*c*) Richesses : institutions matérielles.
    - 3° Du gouvernement : économie de l'État.
  - (*B*) Stat. intellectuelle.
    - 1° Du peup.
      - Religion.
      - Moralité.
      - Intelligence.
    - 2° Du gouv.
      - Constitution.
      - Administration
        - (*aa*) communale.
        - (*bb*) publique.
      - Législation.
- (III) Mélanges et voyages.

Note supplémentaire du Rédacteur.

Comptes rendus au roi concernant les finances dans le royaume des Pays-Bas, grand in-folio, diverses années. Imprimés aux frais de l'État.

Budgets des recettes et dépenses en Belgique, petit in-folio. — Chez Hayez.

Administration des hospices civils et secours de la ville de Bruxelles, comptes généraux de l'an 1807. — Bruxelles, chez Weissenbruch, 1808, 1 vol., in-4°, 251 pages.

Neueste kunde vom kônigreich der Niederlande, von J. G. Fr. Cannabich. — Weimar, 1821, 1 vol., in-8°, 348 p.

Tarif des droits d'entrée, de sortie et de transit de la Belgique, in-4° obl. — Bruxelles, 1833, chez Vandooren.

Annuaire du département de Jemmape, an XII et an XIII. — Mons, in-12°.

Almanach du département de la Dyle. — Bruxelles, an XII et an XIII, chez Weissenbruch, an 1814.

Aperçu historique des observations de météorologie faites en Belgique jusqu'à ce jour. (*Annales de l'observatoire de Bruxelles.*) In-4°, tome I, 1834.

Recherches sur le poids de l'homme en Belgique, par A. Quetelet. (*Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tome VII.)

Tableau statistique de la Belgique et de chaque province en particulier, formant ensemble un cahier, par Vander Maelen. — Bruxelles.

Annuaire industriel et administratif de la Belgique, 1 vol., in-8°, par Vander Maelen. — Bruxelles.

Des colonies agricoles et de leurs avantages, etc., par M. Huerne de Pommeuse, 1 vol., in-8°. — Paris, chez Me Huzard.

Sur la température moyenne au-dessous de la surface de la terre, à Stockholm, par F. Rudberg. (*Annales* de Poggendorf, n° 16; 1834.)

Vers la fin de décembre 1832, j'ai fait construire, aux frais de l'Académie royale de Stockholm, trois thermomètres qui ont été plongés dans l'intérieur de la terre; ces thermomètres sont remplis de mercure et ont été comparés, dans une situation verticale, à un bon thermomètre, de manière que l'on peut tenir compte en même temps de la pression du mercure. Ils sont placés dans des tubes de verre enterrés, fermés par le bas avec des bouchons et remplis ensuite d'un sable fin. Les profondeurs auxquelles descendent les boules des thermomètres, sont de 1, 2 et 3 pieds. L'exposition est au milieu d'une grande plaine où se trouve l'observatoire, ainsi que le petit observatoire magnétique.

Les observations ont commencé au mois de décembre 1832 ; cependant on n'a observé les thermomètres qu'une fois par jour, pendant les six premiers mois ; mais on a fait ensuite, trois fois par jour, la lecture, à 6 heures du matin et à 2 et 9 heures du soir. Comme, en creusant la terre, on a dérangé l'équilibre de sa température et qu'il a fallu quelque temps pour qu'il pût se rétablir, je ne donnerai point ici les observations des six premiers mois de l'année ; je me bornerai à présenter celle du 1er juillet 1833 jusqu'au 1er juillet 1834. Les valeurs moyennes qu'elles ont données, sont les suivantes :

MOIS.	TEMPÉRATURE A LA PROFONDEUR DE		
	UN PIED.	DEUX PIEDS.	TROIS PIEDS.
Juillet 1833 . . .	+ 15°,86 cent.	+ 15°,00 cent.	+ 13°,87 cent.
Août	13,12	13,03	12,88
Septembre . . .	12,18	12,01	11,93
Octobre	8,97	9,08	9,59
Novembre. . . .	3,89	4,62	5,67
Décembre. . . .	0,81	1,77	2,78
Janvier 1834. . .	— 1,51	— 0,42	0,40
Février.	— 0,38	— 0,02	0,24
Mars	+ 0,35	+ 0,63	0,80
Avril	3,36	3,02	2,74
Mai.	8,90	8,09	7,28
Juin	13,65	12,50	11,29

Si l'on prend la moyenne des valeurs pour un de ces thermomètres, on obtient pour la *température moyenne* de l'année, à Stockholm :

A 1 pied de profondeur. . . . . . 6°,60 centigr.
A 2 pieds » . . . . 6,61 »
A 3 pieds » . . . . 6,62 »

d'où résulte que la *température moyenne de la terre*, du moins jusqu'à trois pieds d'enfoncement, *se trouve indépendante de*

la profondeur; et probablement ceci a lieu pour toutes les profondeurs jusqu'aux limites où cessent les variations annuelles de la température.

Notre tableau montre, en outre, que *la température, vers la fin de septembre et vers la fin de mars, ou vers les époques des équinoxes de l'automne et du printemps, est la même à différentes profondeurs.*

Quoiqu'il soit nécessaire d'avoir les résultats de plusieurs années d'observations pour pouvoir confirmer ces deux propositions, j'ai cru néanmoins devoir appeler sur elles l'attention des physiciens, afin qu'ils puissent les vérifier dans d'autres stations.

Cette température moyenne au-dessous de la surface du sol est supérieure à la température de l'air à Stockholm, qui est de + 5°,7 centigr.

Observations sur la température de la terre, faites à différentes profondeurs, à l'observatoire de Bruxelles, par A. QUETELET.

Il est fâcheux qu'en nous donnant les résultats de ses observations intéressantes, M. *Rudberg* ne nous ait pas fait connaître s'il leur a fait subir préalablement des corrections pour l'inégalité des températures à différentes profondeurs. Les indications du thermomètre, en effet, dépendent de la température de la boule du thermomètre et de celle du liquide dans les différentes parties du tube. Quand le thermomètre est à une profondeur peu grande et que la capacité de la boule est considérable par rapport à celle du tube, la correction se réduit à très-peu de chose; mais il n'en est pas de même pour les thermomètres qui descendent à une profondeur très-grande.

Désirant répondre à l'appel que fait M. *Rudberg* aux physiciens qui s'occupent des températures de la terre, je présente ici les résultats des observations que j'ai faites pendant l'année 1834, sur quatre thermomètres à esprit de vin, plongés entre la surface du sol et la profondeur d'un mètre. Vers

le milieu de l'année, trois autres thermomètres de 6, de 12 et de 24 pieds ont été également plongés en terre; mais je me réserve de faire connaître leurs indications plus tard. Ces instrumens sont observés trois fois par jour; je ne donnerai ici que les indications de midi, et sans les réductions dont j'ai parlé plus haut, parce que les corrections n'ont pu être faites encore, et que pour les thermomètres de médiocre dimension, elles se réduisent d'ailleurs à peu de chose quand on ne considère que le résultat général de l'année.

Mes thermomètres sont plongés dans la terre, au nord de l'observatoire et à l'ombre; cette disposition diffère de celle que M. *Arago* a donnée aux thermomètres qu'il a exposés, dans le jardin de l'observatoire, à l'action du soleil, et pour lesquels ce célèbre physicien a recueilli une quantité d'observations curieuses dont il est fâcheux que la science soit privée jusqu'à présent.

MOIS DE 1834.	TEMPÉRATURE A LA PROFONDEUR DE			
	17 cent.	55 cent.	75 cent.	1 mètre.
Janvier (1)	7,36	7,63	7,94	8,51
Février	3,97	4,66	5,71	6,72
Mars	6,15	6,54	6,98	7,54
Avril	6,58	6,64	6,97	7,43
Mai	13,21	12,88	12,02	11,53
Juin	15,65	15,04	14,61	14,22
Juillet	18,15	17,67	17,14	16,75
Août	17,71	17,97	17,96	17,97
Septembre	14,85	15,47	15,88	16,27
Octobre	11,12	11,81	13,01	13,91
Novembre	6,78	8,10	9,37	10,68
Décembre	5,21	5,89	7,08	8,22
Moyenne de l'année	10,56	10,86	11,22	11,64
Demi-somme des max. et min.	11°07	11°31	11°83	12°35
Différence » »	14°18	13°31	12°25	11°25

(1) Les dix premiers jours de janvier manquent.

Analyse propre à fixer la limite de la convergence d'une série donnée par LAMBERT, *en* 1765, *pour exprimer, par la hauteur du jet, la portée des projectiles lancés dans l'air;* par M. PLANA.

(1) *Lambert* a publié, dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1765, une dissertation *Sur la résistance des fluides avec la solution du problème balistique*, où il est parvenu (*Voyez* pag. 178), à une série qu'il paraît croire toujours convergente, quoiqu'il en ait calculé trois termes seulement. Du moins, sa phrase : *mais quelque convergentes que soient ces suites*, etc., autorise à penser que *Lambert* avait de sa série cette opinion favorable. Cependant, il suffit de calculer le terme suivant pour faire tomber une telle assertion; mais le calcul de ce terme n'est pas fort aisé; et d'ailleurs, on peut désirer une méthode plus directe pour parvenir à cette série de *Lambert*. Celle que je vais exposer présente, si je ne me trompe, quelques avantages propres à la faire préférer.

(2) En supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré v de la vitesse, et exprimée par cv^2, nous avons, comme l'on sait,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y''' = 2cy''\sqrt{1+y'^2},$$

pour l'équation différentielle de la trajectoire, où

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Cette équation a lieu quel que soit le point de la courbe où l'on place l'origine des coordonnées. Pour plus de généralité, relativement au calcul de la portée, nous prendrons, pour origine des coordonnées, le point où la tangente à la trajectoire devient parallèle au plan de projection; et cela, sans changer

la direction des axes qui sont censés parallèles aux axes primitifs, dont l'origine est placée au point de départ du projectile.

Ainsi, en nommant θ l'angle que le plan de projection fait avec l'horizon, nous supposerons que, pour un autre point quelconque de la courbe, où la tangente fait un angle φ avec l'horizon, on a

$$\text{(II)}.\ y'=\text{tang.}\,\varphi=\text{tang.}\,\theta+Ax+A_1x^2+A_2x^3+A_3x^4+\text{etc.};$$

Et par conséquent;

$$\text{(III)}.\ y=\int y'dx=x\,\text{tang.}\,\theta+A.\frac{x^2}{2}+A_1\frac{x^3}{3}+A_2\frac{x^4}{4}+A_3\frac{x^5}{5}+\text{etc.};$$

$$y''=A+2A_1x+3A_2x^2+4A_3x^3+\text{etc.};$$

$$y'''=2A_1+2.3.A_2x+3.4.A_3x^2+\text{etc.}$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (I), il en résulte celle-ci;

$$\text{(IV)}\ \ldots\ 2A_1+2.3A_2x+3.4A_3x^2+\text{etc.}$$
$$=\frac{2c}{\cos.\,\varphi}(A+2A_1x+3A_2x^2+\text{etc.}),$$

de laquelle on tire aisément la loi de formation des coefficiens A_1, A_2, A_3, etc. En effet, il est d'abord clair que, en faisant $x=o$, on a $\varphi=\theta$, ce qui donne

$$A_1=\frac{A.c}{\cos.\,\theta}.$$

En différentiant l'équation (IV) par rapport à x, et faisant ensuite $x=o$, $\varphi=\theta$ on aurait l'équation qui détermine A_2: une nouvelle différentiation donnerait A_3. Ainsi, il est manifeste que, en faisant pour plus de simplicité

$$X=A+2A_1x+3A_2x^2+4A_3x^3+\text{etc.},$$

on aura les équations suivantes, pourvu qu'on ait soin de faire

$x = o$, $\varphi = \theta$ après toutes les différentiations indiquées; savoir :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{cd^o.[X(\cos.\varphi)^{-1}]}{dx}; \\ 3A_2 &= \frac{cd.[X(\cos.\varphi)^{-1}]}{dx}; \\ 3.4.A_3 &= \frac{cd^2.[X(\cos.\varphi)^{-1}]}{dx^2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (3.4.5\ldots i+1)A_i &= \frac{cd^{i-1}[X(\cos.\varphi)^{-1}]}{dx^{i-1}}. \end{aligned}\right\} \ldots \text{(B)}.$$

Il suffit donc de connaître le premier coefficient A pour pouvoir en conclure tous les autres. Pour cela, je remarque que l'équation (I) revient à dire que,

$$\frac{dy''}{y''} = 2cdx\sqrt{1+y'^2} = 2cds.$$

Donc, en intégrant cette équation, il viendra $y'' = A.e^{2cs}$, puisque la valeur de y'' devient égale au coefficient A, lorsque $s = o$ et $x = o$.

Pour appliquer cette équation au point de départ du projectile, il faudra changer le signe de s; ce qui donnera $y'' = Ae^{-2cs'}$; s' désignant la longueur de la courbe depuis le point de projection jusqu'à la nouvelle origine. Mais nous avons l'équation générale

$$v^2 = \frac{g(1+y'^2)}{-y''},$$

qui, en nommant a la vitesse de projection et α l'angle de projection avec l'horizon, donne

$$\frac{a^2.\cos.^2\alpha}{g} = \frac{-1}{y''} = \frac{-1}{Ae^{-2cs'}}; \quad \ldots$$

partant :

$$A = \frac{-g.e^{2cs'}}{a^2 \cos.^2\alpha}.$$

D'un autre côté, si l'on multiplie par ds le second membre de l'équation $y'' = Ae^{-2cs}$ et par

$$dx\sqrt{1+y'^2}$$

le premier membre, on a l'équation

$$dy'.\sqrt{1+y'^2} = Ae^{-2cs}ds,$$

qui, étant intégrée depuis $s = o$ jusqu'à $s = s'$, donne

$$\int dy'\sqrt{1+y'^2} = \frac{A}{2c}(1-e^{-2cs'}) = \frac{A}{2c} + \frac{g}{2c.a^2 \cos.^2\alpha}.$$

Mais nous avons

$$\int dy'\sqrt{1+y'^2} = \int \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi} = \frac{\sin.\varphi}{2\cos.^2\varphi} + \tfrac{1}{2}\log.\operatorname{tang.}(45^o + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Donc, en faisant pour plus de simplicité,

(V). . . $F(\varphi) = \frac{\operatorname{tang.}\varphi}{\cos.\varphi} + \log.\operatorname{tang.}(45^o + \tfrac{1}{2}\varphi)$,

il viendra

(VI) . . . . $A = c[F(\theta) - F(\alpha)] - \frac{g}{a^2.\cos.^2\alpha}$.

Cela posé, si l'on fait

$$F(\alpha) + \frac{g}{c.a^2 \cos.^2\alpha} = F(\beta);$$

nous aurons

(VII) . . . . $A = -c[F(\beta) - F(\theta)]$.

On voit par là que le coefficient A dépend de l'angle β que fait avec l'horizon l'asymptote inclinée de la courbe, et de l'angle θ formé par le plan de projection avec le même horizon.

(3) Pour développer les équations (B), il faut remarquer que, d'après l'équation (II), on a

$$\frac{d.\,(\cos.\,\varphi)^{-1}}{dx} = X \sin.\varphi;$$

$$\frac{d^2.\,(\cos.\,\varphi)^{-1}}{dx^2} = X^2.\cos.^3\varphi + \frac{dX}{dx}\sin.\,\varphi;$$

$$\frac{d^3.\,(\cos.\,\varphi)^{-1}}{dx^3} = 3X\frac{dX}{dx}\cos.^3\varphi - 3X^3\cos.^4\varphi\sin.\,\varphi + \frac{d^2X}{dx^2}\sin.\,\varphi;$$

$$\frac{d^4.\,(\cos.\,\varphi)^{-1}}{dx^4} = 3\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\cos.^3\varphi + 4X\frac{d^2X}{dx^2}\cos.^3\varphi$$
$$-18.X^2\frac{dX}{dx}\cos.^4\varphi\sin.\,\varphi - 15.X^4\cos.^7\varphi$$
$$+12X^4\cos.^5\varphi + \frac{d^3X}{dx^3}\sin.\,\varphi;$$

$$\frac{d^5.\,(\cos.\,\varphi)^{-1}}{dx^5} = 10.\frac{dX}{dx}.\frac{d^2X}{dx^2}\cos.^3\varphi - 4s.X\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\cos.^4\varphi\sin.\,\varphi$$
$$+5X\frac{d^3X}{dx^3}\cos.^3\varphi - 30.X^2\frac{d^2X}{dx^2}\cos.^4\varphi\sin.\,\varphi$$
$$-150.X^3\frac{dX}{dx}\cos.^7\varphi + 120.X^3\frac{dX}{dx}\cos.^5\varphi$$
$$+105.X^5\cos.^8\varphi\sin.\,\varphi - 60.X^5\cos.^6\varphi\sin.\,\varphi$$
$$+\frac{d^4X}{dx^4}\sin.\,\varphi;$$

Etc.,

et que l'on peut écrire l'équation symbolique

$$(3.4.5\ldots.\,i+1)\,A_i = \frac{c[dX + d.(\cos.\varphi)^{-1}]^{i-1}}{dx^{i-1}},$$

en ayant soin : 1° de transporter les exposans sur la caractéristique d, après le développement du binome ; 2° de remplacer le premier terme par

$$(\cos.\varphi)^{-1}\ \frac{d^{i-1}X}{dx^{i-1}}$$

et le dernier par

$$\frac{Xd^{i-1}(\cos.\varphi)^{-1}}{dx^{i-1}}.$$

Cela posé, on obtiendra aisément les équations suivantes ;

$$A_1 = c.\frac{A}{\cos.\theta};$$

$$A_2 = \frac{c}{3}\left\{\frac{2A_1}{\cos.\theta} + A^2\sin.\theta\right\};$$

$$A_3 = \frac{c}{3.4}\left\{\frac{6.A_2}{\cos.\theta} + 6.AA_1\sin.\theta + A^3\cos.^3\theta\right\};$$

$$A_4 = \frac{c}{3.4.5}\left\{\begin{array}{l} 24.\frac{A_3}{\cos.\theta} + 24\,AA_2\sin.\theta + 12.\,A_1A^2\cos.^3\theta \\ + 12\,A_1^2\sin.\theta - 3\,A^4\sin.\theta\cos.^4\theta \end{array}\right\};$$

$$A_5 = \frac{c}{3.4.5.6}\left\{\begin{array}{l} 120.\frac{A_4}{\cos.\theta} + 120.\,AA_3\sin.\theta + 60\,A^2A_2\cos^3\theta \\ + 120.\,A_1A_2\sin.\theta + 60.\,AA_1^2\cos.^3\theta \\ - 60\,A^3A_1\cos.^4\varphi\sin.\theta - 15.\,A^5\cos.^7\theta \\ + 12\,A^5\cos.^5\theta \end{array}\right\};$$

$$A_6 = \frac{c}{3.4.5.6.7}\left\{\begin{array}{l} 720.\frac{A_5}{\cos.\theta} + 720.\,AA_4\sin.\theta + 360\,A^2A_3\cos.^3\theta \\ + 120\,A_1^3\cos.^3\theta + 720\,A_1A_3\sin.\theta \\ + 720\,AA_1A_2\cos.^3\theta + 360.\,A_2^2\sin.\theta \\ - 360\,A^3A_2\sin.\theta\cos.^4\theta + 360\,A_1A_4\cos.^5\theta \\ - 540\,A^2A_1^2\sin.\theta\cos.^4\theta - 450.\,A_1A_4\cos.^7\theta \\ + 105.\,A^6\cos.^8\theta\sin.\theta - 60.\,A^6\sin.\theta\cos.^6\theta \end{array}\right\}.$$

Etc.,

d'où l'on tire ;

$$A_1 = \frac{c.A.}{\cos.\theta}$$

$$A_2 = \frac{c.A}{3}\left\{\frac{2c}{\cos.^2\theta} + A\sin.\theta\right\};$$

$$A_3 = \frac{c.A}{3.4}\left\{\frac{4c^2}{\cos.^3\theta} + 8cA\,\mathrm{tang}.\theta + A^2\cos.^3\theta\right\};$$

$$A_4 = \frac{cA}{3.4.5}\left\{\begin{array}{l}\frac{8c^3}{\cos.^4\theta} + 44.c^2A.\frac{\mathrm{tang}.\theta}{\cos.\theta} + 6.cA^2\cos.^2\theta \\ + 8cA^2 - 3A^3\sin.\theta\cos.^4\theta\end{array}\right\};$$

$$A_5 = \frac{cA}{3.4.5.6}\left\{\begin{array}{l}\frac{16.c^4}{\cos.^5\theta} + 208.c^3A\frac{\mathrm{tang}.\theta}{\cos.^2\theta} + \frac{16.c^2A^2}{\cos.\theta} \\ + 112.c^2A^2\cos.\theta - 15.A^4\cos.^7\theta + 12A^4\cos.^5\theta \\ + 40.c^2A^2\frac{\sin.^2\theta}{\cos.\theta} - 36\,cA^3\sin.\theta\cos.^3\theta\end{array}\right\};$$

$$A_6 = \frac{cA}{3.4.5.6.7}\left\{\begin{array}{l}\frac{32.c^5}{\cos.^6\theta} + 912.c^4A\frac{\mathrm{tang}.\theta}{\cos.^3\theta} + \frac{32.c^3A^2}{\cos.^2\theta} \\ + 944c^3A^2 + 1248c^3A^2\mathrm{tang}.^2\theta + 228cA^4\cos.^4\theta \\ - 294\,cA^4\cos.^6\theta - 144\,c^2A^3\sin.\theta \\ + 280c^2A^3\sin.^3\theta + 105\,A^5\cos.^8\theta\sin.\theta \\ - 60.\,A^5\cos.^6\theta\sin.\theta\end{array}\right\};$$

Etc.

Ces coefficiens se simplifient, lorsqu'il est permis de supposer *nul* l'angle θ; alors on a :

$$(B')\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}A_1 = cA; \\ A_2 = \frac{2}{3}c^2A; \\ A_3 = \frac{cA}{3.4}(4c^2 + A^2); \\ A_4 = \frac{cA}{3.4.5}(8c^3 + 14.cA^2); \\ A_5 = \frac{cA}{3.4.5.6}(16.c^4 + 128c^2A^2 - 3A^4); \\ A_6 = \frac{cA}{3.4.5.6.7}(32.c^5 + 976c^3A^2 - 66.cA^4); \\ \text{Etc.};\end{array}\right.$$

ce qui s'accorde avec les résultats trouvés par *Lambert* (*Voyez* pag. 173 du vol. de l'*Académie de Berlin*, pour l'année 1765).

(4) Les coefficiens A, A_1, A_2, etc. étant par là déterminés, remarquons que l'équation (III) donne

$$\text{(VIII).}\quad \frac{2}{A}(y - x\,\text{tang.}\,\theta) = x^2 + \frac{2}{3}\frac{A_1}{A}x^3 + \frac{2}{4}\frac{A_2}{A}x^4 + \frac{2}{5}\frac{A_3}{A}x^5 + \text{etc.}$$

Or, en regardant x, y comme les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec le plan de projection, on a l'équation

$$x\,\text{tang.}\,\theta - y = y_1 - x_1\,\text{tang.}\,\theta,$$

pourvu que x_1, y_1 soient, relativement à la première origine, les coordonnées du point où l'on a fixé la seconde origine. Donc, en posant

$$\text{(IX)}\quad .\quad .\quad Y = x\,\text{tang.}\,\theta - y = y_1 - x_1\,\text{tang}\,\theta,$$

il viendra

$$\text{(X)}\quad .\quad -\frac{2Y}{A} = x^2 + \frac{2}{3}\frac{A_1}{A}x^3 + \frac{2}{4}\frac{A_2}{A}x^4 + \frac{2}{5}\frac{A_3}{A}x^5 + \text{etc.}$$

Regardons le premier membre de cette équation comme une quantité connue : en tirant de là, par le retour des suites, la valeur de x et divisant cette quantité par cos. θ, on aura la portion de la portée, qui est comprise depuis le point de chute jusqu'au point où l'ordonnée y_1 rencontre le plan de projection. Pour avoir l'autre portion, comprise depuis ce dernier point jusqu'au point de départ du projectile, il faut observer que, en changeant le signe de x_1, l'équation (VIII) devient

$$\text{(XI).}\quad \frac{2}{A}(y + x\,\text{tang.}\,\theta) = x^2 - \frac{2}{3}\frac{A_1}{A}x^3 + \frac{2}{4}\frac{A_2}{A}x^4 - \frac{2}{5}\frac{A_3}{A}x^5 + \text{etc.}$$

Mais, en faisant ici $x = x_1$ et $y = -y_1$, le premier membre

sera égal à $-\frac{2Y}{A}$, et on aura l'équation

$$(XII).\quad -\frac{2Y}{A}=x^2-\frac{2}{3}\frac{A_1}{A}x^3+\frac{2}{4}\frac{A_2}{A}x^4-\frac{2}{5}\frac{A_3}{A}x^5+\text{etc.},$$

où la valeur de x, étant divisée par cos. θ, fera connaître la première portion de la portée.

Il suit de là qu'on aura la portée totale, en sommant les deux valeurs différentes de x qui sont données par les équations (X) et (XII), et divisant cette somme par cos. θ.

(5) L'exécution de cette opération deviendra plus facile à l'aide des formules suivantes, tirées de la théorie élémentaire du retour des suites. Soit :

$$N=x\sqrt[m]{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{etc.}}:$$

la valeur de x, tirée de cette équation, sera de la forme

$$x=B_0N+B_1N^2+B_2N^3+B_3N^4+\text{etc.},$$

et il s'agit de déterminer les coefficiens B_0, B_1, B_2, etc., par les coefficiens a_0, a_1, a_2, etc. En faisant

$$X=(a_0+a_1x+a_2x^2+\text{etc.})^{\frac{1}{m}}$$

on a $N=xX$, et par conséquent $x-N.X^{-1}=o$. Maintenant remarquons que, si, au lieu de zéro, on avait a dans le second membre de cette équation, on aurait

$$x-N.X^{-1}=a;$$

et que de là on tirerait, d'après la série de *Lagrange*,

$$x=x+N.X^{-1}+\frac{N^2}{1.2}\frac{d.(X^{-2})}{dx}+\frac{N^3}{2.3}\frac{d^2(X^{-3})}{dx^2}+\text{etc.}$$

en ayant soin de faire $x=a$, après les différentiations indi-

quées. Donc, pour avoir la valeur de x, qui convient à l'équation $N = xX$, il faudra poser $x = o$, après les différentiations. Pour trouver ces coefficiens de la manière la plus expéditive, il conviendra de former le développement de la puissance indéterminée n du polynome

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.},$$

sous la forme

$$(a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc.})^n$$
$$= \Psi_o(n) + x\Psi_1(n) + x^2\Psi_2(n) + x^3\Psi_3(n) + \text{etc.};$$

et de là on tirera immédiatement :

$$X^{-1} = \Psi_o\left(-\frac{1}{m}\right) = (a^o)^{-\frac{1}{m}}; \frac{d.X^{-2}}{dx} = \Psi_1\left(-\frac{2}{m}\right); \frac{d^2X^{-3}}{dx^2} = 2\Psi_2\left(-\frac{3}{m}\right)$$

$$\frac{d^3.X^{-4}}{dx^3} = 2.3.\Psi_3\left(-\frac{4}{m}\right);\ \frac{d.^4X^{-5}}{dxs} = 2.3.4\Psi_4\left(-\frac{5}{m}\right);$$

$$\frac{d^i.X^{-i-1}}{dx^i} = (2.3.4\ldots i.)\,\Psi_i\left(-\frac{i+1}{m}\right).$$

En écrivant, pour abréger, $[n]^p$ au lieu de

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p},$$

les fonctions de n désignées par $\Psi_o(n)$, $\Psi_1(n)$, $\Psi_2(n)$, etc., sont données par les équations suivantes :

$\Psi^o(n) = a_o^n$;

$\Psi_1(n) = n a_o^{n-1} a_1$;

$\Psi_2(n) = n a_o^{n-1} a_2 + [n]^2 a_o^{n-2} a_1^2$,

$\Psi_3(n) = n a_o^{n-1} a_3 + [n]^2 a_o^{n-2} 2a_1 a_2 + [n]^3 a_o^{n-3} a_1^3$;

$$\Psi_4(n) = na_o^{n-1}a_4 + [n]^2 a_o^{n-2}(2a_1a_3 + a_2^2) + [n]^3 a_o^{n-3} 3a_1^2 a_2$$
$$+ [n]^4 a_o^{n-4} a_1^4 ;$$

$$\Psi_5(n) = na_o^{n-1}a_5 + [n]^2 a_o^{n-2}(2a_1a_4 + 2a_2a_3)$$
$$+ [n]^3 a_o^{n-3}(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)$$
$$+ [n]^4 a_o^{n-4} 4a_1^3a_2 + [n]^5 a_o^{n-5} a_1^5 ;$$

$$\Psi_6(n) = na_o^{n-1}a_6 + [n]^2 a_o^{n-2}(2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2)$$
$$+ [n]^3 a_o^{n-3}(3a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 + a_2^3)$$
$$+ [n]^4 a_o^{n-4}(4a_1^3a_3 + 6a_1^2a_2^2) + [n]^5 a_o^{n-5} 5a_1^4a_2$$
$$+ [n]^6 a_o^{n-6} a_1^6 ;$$

$$\Psi_7(n) = na_o^{n-1}a_7 + [n]^2 a_o^{n-2}(2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4)$$
$$+ [n]^3 a_o^{n-3}(3a_1^2a_5 + 6a_1a_2a_4 + 3a_2^2a_3 + 3a_1a_3^2)$$
$$+ [n]^4 a_o^{n-4}(4a_1^3a_4 + 12a_1^2a_2a_3 + 4a_1a_2^3)$$
$$+ [n]^5 a_o^{n-5}(5a_1^4a_3 + 10a_1^3a_2^2) + [n]^6 a_o^{n-6} 6a_1^5a_2$$
$$+ [n]^7 a_o^{n-7} a_1^7 ;$$

$$\Psi_8(n) = na_o^{n-1}a_8 + [n]^2 a_o^{n-2}(2a_1a_7 + 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2)$$
$$+ [n]^3 a_o^{n-3}(3a_1^2a_6 + 6a_1a_2a_5 + 3a_2^2a_4 + 6a_1a_3a_4 + 3a_2a_3^2)$$
$$+ [n]^4 a_o^{n-4}(4a_1^3a_5 + 12.a_1^2a_2a_4 + 12a_1a_2^2a_3$$
$$+ 6a_1^2a_3^2 + a_2^4)$$
$$+ [n]^5 a_o^{n-5}(5a_1^4a_4 + 20a_1^3a_2a_3 + 10.a_1^2a_2^3)$$
$$+ [n]^6 a_o^{n-6}(6a_1^5a_3 + 15a_1^4a_2^2)$$
$$+ [n]^7 a_o^{n-7} 7a_1^6a_2 + [n]^8 a_o^{n-8} a_1^8 ;$$

etc.

En appliquant ces formules générales à l'équation

$$N = x\sqrt{1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{etc.}}$$

on trouvera que, après avoir fait

$$x = N + B_1 N^2 + B_2 N^3 + B_3 N^4 + \text{etc.},$$

on doit prendre;

$$B_1 = -\frac{1}{2} a_1;$$

$$B_2 = \frac{5}{8} a_1^2 - \frac{1}{2} a_2;$$

$$B_3 = -a_1^3 + \frac{3}{2} a_1 a_2 - \frac{1}{2} a_3;$$

$$B_4 = \frac{231}{128} a_1^4 - \frac{63}{16} a_1^2 a_2 + \frac{7}{4} a_1 a_3 + \frac{7}{8} a_2^2 - \frac{1}{2} a_4;$$

$$B_5 = -\frac{7}{2} a_1^5 + 10 a_1^3 a_2 - 5 a_1^2 a_3 - 5 a_1 a_2^2 + 2 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3 - \frac{1}{2} a_5;$$

$$B_6 = \frac{7293}{1024} a_1^6 - \frac{6435}{256} a_1^4 a_2 + \frac{429}{32} a_1^3 a_3 + \frac{1287}{64} a_1^2 a_2^2 - \frac{99}{16} a_1^2 a_4$$
$$- \frac{99}{8} a_1 a_2 a_3 + \frac{9}{4} a_1 a_5 - \frac{33}{16} a_2^3 + \frac{9}{8} a_3^2 + \frac{9}{4} a_2 a_4 - \frac{1}{2} a_6;$$

Etc.

Il est évident que l'équation

$$N = x\sqrt{1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \text{etc.}}$$

donne

$$x = N - B_1 N^2 + B_2 N^3 - B_3 N^4 + \text{etc.}$$

Donc, en désignant par Q la somme formée par cette valeur de x et par la précédente, on aura

$$\frac{Q}{2} = N + B_2 N^3 + B_4 N^5 + B_6 N^7 + \text{etc.}$$

(6) Ainsi, en nommant P la portée sur le plan de projection, comptée depuis le point de départ, nous aurons par l'application immédiate de cette dernière formule aux deux équations (X) et (XII) :

$$\text{(XIII)}\ldots \frac{1}{2}.\,P\cos.\theta = \left(-\frac{2Y}{A}\right)^{\frac{1}{2}} + B_2\left(-\frac{2Y}{A}\right)^{\frac{3}{2}} + B_4\left(-\frac{2Y}{A}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$+ B_6\left(-\frac{2Y}{A}\right)^{\frac{7}{2}} +, \text{etc.}$$

En faisant dans les expressions précédentes de B_2, B_4, B_6;

$$a_1 = \frac{2}{3}\frac{A_1}{A};\quad a_2 = \frac{2}{4}\frac{A_2}{A};\quad a_3 = \frac{2}{5}\frac{A_3}{A};$$

$$a_4 = \frac{2}{6}\frac{A_4}{A};\quad a_5 = \frac{2}{7}\frac{A_5}{A};\quad a_6 = \frac{2}{8}\frac{A_6}{A};$$

il viendra

$$B_2 = \frac{5}{18}\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{A_2}{A}\right);$$

$$B_4 = \frac{77}{216}\left(\frac{A_1}{A}\right)^4 - \frac{7}{8}\left(\frac{A_1}{A}\right)^2\left(\frac{A_2}{A}\right) + \frac{7}{15}\left(\frac{A_1}{A}\right)\left(\frac{A_3}{A}\right)$$

$$+ \frac{7}{32}\left(\frac{A_2}{A}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{A_4}{A}\right);$$

$$B_6 = \frac{2431}{3888}\left(\frac{A_1}{A}\right)^6 - \frac{715}{288}\left(\frac{A_1}{A}\right)^4\left(\frac{A_2}{A}\right) + \frac{143}{90}\left(\frac{A_1}{A}\right)^3\left(\frac{A_3}{A}\right)$$

$$- \frac{11}{12}\left(\frac{A_1}{A}\right)^2\left(\frac{A_4}{A}\right) + \frac{143}{64}\left(\frac{A_1}{A}\right)^2\left(\frac{A_2}{A}\right)^2$$

$$- \frac{33}{20}\left(\frac{A_1}{A}\right)\left(\frac{A_2}{A}\right)\left(\frac{A_3}{A}\right) + \frac{3}{7}\left(\frac{A_1}{A}\right)\left(\frac{A_5}{A}\right) - \frac{33}{128}\left(\frac{A_2}{A}\right)^3$$

$$+ \frac{9}{50}\left(\frac{A_3}{A}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{A_2}{A}\right)\left(\frac{A_4}{A}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{A_6}{A}\right);$$

Maintenant, si l'on fait

$$\text{(XIV)} \ldots K = F(\beta) - F(\theta),$$

on aura $A = -cK$; et en posant

$$B_2 = c^2 B'_2; \quad B_4 = c^4 B'_4; \quad B_6 = c^6 B'_6$$

il viendra

$$\text{(XV)} \ldots\ldots \frac{c}{2} P \cos.\theta = \left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{1}{2}} + B'_2\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{3}{2}} + B'_4\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$+ B'_6\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{7}{2}}$$

La substitution des valeurs de $\frac{A_1}{A}$, $\frac{A_2}{A}$, etc., trouvées dans le n° 3, donne:

$$B'_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\cos.^2\theta} + \frac{K \sin.\theta}{12};$$

$$B'_4 = \frac{1}{270} \cdot \frac{1}{\cos.^4\theta} + \frac{K}{180} \cdot \frac{\text{tang.}\theta}{\cos.\theta} + \frac{K^2}{480}\sin.^2\theta - \frac{K^3}{120} \cdot \sin.\theta\cos.^4\theta.$$

L'expression du coefficient B_6' est fort compliquée; mais, en supposant l'angle θ nul on a, pour la portée sur un plan de projection horizontal:

$$B'_2 = \frac{1}{9}; \; B'_4 = \frac{1}{270}; \; B'_6 = -\frac{139}{85050} - \frac{181K^2}{18900} + \frac{K^4}{1050};$$

où il faut observer que,

$$-\frac{139}{85050} = \frac{2431}{3888} - \frac{715}{288} \cdot \frac{2}{3} + \frac{143}{90} \cdot \frac{1}{3} + \frac{143}{64} \cdot \frac{4}{9} - \frac{11}{12} \cdot \frac{2}{15} - \frac{33}{20} \cdot \frac{2}{9}$$

$$+ \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{45} - \frac{33}{128} \cdot \frac{8}{27} + \frac{9}{50} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{45.7};$$

$$-\frac{181}{18900}=\frac{143}{90.12}-\frac{11.14}{12.3.4.5}-\frac{33.2}{20.3.12}+\frac{3}{7}.\frac{128}{3.4.5.6}+\frac{9}{50}.\frac{8}{9.16}$$

$$+\frac{1}{4}.\frac{14}{3.4.5}-\frac{976}{8.3.4.5.6.7};$$

$$\frac{1}{1050}=-\frac{3}{4.5.6.7}+\frac{9}{50.9.16}+\frac{66}{8.3.4.5.6.7}.$$

La formule (XV) donne donc, pour ce cas particulier,

$$(\text{XVI}). \quad \frac{cP}{2}=\sqrt{\frac{2cY}{K}}\left[1+\frac{1}{9}\left(\frac{2cY}{K}\right)+\frac{1}{270}\left(\frac{2cY}{K}\right)^2\right.$$

$$\left.-\left(\frac{139}{85050}+\frac{181.K^2}{18900}-\frac{K4}{1050}\right)\left(\frac{2cY}{K}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

où Y est la plus grande ordonnée, et

$$K=F(\beta)=F(\alpha)+\frac{g}{c.a^2\cos.^2\alpha}.$$

Cette série est précisément celle trouvée par *Lambert*, à la page 178 du vol. cité plus haut. Pour en voir l'identité, il suffit de remarquer que *Lambert* écrivait ce résultat ainsi :

$$2cP=2\left(2\sqrt{\frac{2cY}{K}}\right)+\frac{1}{18}\left(2\sqrt{\frac{2cY}{K}}\right)^3+\frac{1}{2160}\left(2\sqrt{\frac{2cY}{K}}\right)^5$$

$$-\frac{1}{2^5}\left(\frac{139}{85050}+\frac{K.^2 181}{18900}-\frac{K4}{1050}\right)\left(2\sqrt{\frac{2cY}{K}}\right)^7+\text{etc.}$$

S'il avait calculé le *quatrième* terme, il aurait vu que cette série n'est pas toujours convergente; et qu'elle cesse de l'être, en général, pour des valeurs de K plus grandes que l'unité : ou, en d'autres termes, pour les trajectoires dont l'asymptote inclinée fait avec l'horizon un angle qui surpasse 40°.

La série (XVI) a été reproduite par *Tempelhoff*, dans un Mémoire publié dans le vol. de l'Académie de Berlin, pour les années 1788—89 (*Voy.* pag. 251); mais il est, ce me semble, permis de penser qu'il n'a pas remarqué l'identité de son résultat avec celui de *Lambert*.

(7) Appliquons la formule (XVI) à l'exemple calculé par *Legendre*, dans le 1er vol. de ses *Exercices de calcul intégral* (pag. 331—336).

En faisant, comme lui, $\frac{1}{2c} = 1$, on a dans cet exemple,

$$2cY = 1{,}400652;\ K = 2{,}495587;\ \log. K = 0{,}3971727;$$

$$\log. \frac{2cY}{K} = 9{,}7491572;\ \log. \sqrt{\frac{2cY}{K}} = 9{,}8745786;$$

$$\log. \frac{1}{9}\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{3}{2}} = 8{,}6694933;\ \log. \frac{1}{270}\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{5}{2}} = 6{,}9415292;$$

$$B'_6 = -0{,}001634 - 0{,}059644 + 0{,}036941 = -0{,}024317.$$

$$\log. B'_6\left(\frac{2cY}{K}\right)^{\frac{7}{2}} = 8{,}5083172\ (-).$$

Il suit de là que

$$\frac{P}{4} = 0{,}749167 + 0{,}046719 + 0{,}000874 - 0{,}032234;$$

$$P = 3{,}058104.$$

En supprimant le quatrième terme $-0{,}032234$, on aurait $P = 3{,}187040$.

Le calcul direct de *Legendre*, donne $P = 3{,}1911$. Ainsi, on s'approche davantage du véritable résultat en supprimant le quatrième terme de la série de *Lambert*. Cela prouve que cette série est divergente, et qu'on ne peut l'employer pour une approximation *indéfinie*: elle peut devenir utile en l'employant avec les circonspections analogues aux cas des séries que *Legendre* a nommées *demi-convergentes*.

Turin, le 19 novembre 1834.

Sur les variations du pouvoir réfléchissant d'un rhomboïde de spath calcaire, pour différens plans formant des angles voisins de ceux de polarisation. Extrait d'une lettre de M. R. POTTER au Rédacteur.

« *Le* 28 *janvier* 1833, étant parvenu à obtenir une surface parfaitement plane sur un petit rhomboïde de spath d'Islande, et ayant enduit sa seconde surface de cire à cacheter noire, j'en fis, le même jour, l'essai à mon photomètre comparateur, (1) et j'obtins les résultats suivans dans le plan de la plus petite diagonale :

Angle d'incidence sur le spath d'Islande.	*Incidence correspondante pour une égale réflexion sur le crown glass.*
5°	23°
5	21
5	20 ½
5	22 ½
5	22
5	23
57	61,7
57	61,7
57	61,7
57	61,5
57	61,5
57	61,6

» *Le* 29 *janvier* 1833, j'obtins les résultats suivans, en observant dans le plan de la plus grande diagonale :

---

(1) Voyez le tome VIII, page 112 de la *Correspondance mathématique.*

Angle d'incidence sur le spath d'Islande.	*Angle correspondant sur le crown glass.*
5°	21°
5	22
5	22 ½
5	22 ½
5	22
5	20
57	59,2
57	59,2
57	59,1
57	59,2
57	59,0
57	59,0

» 15 *avril* 1833. Je trouvai que l'angle de polarisation, dans le plan de la plus grande diagonale de la surface rhomboïdale, était d'*environ* 57° ; et, dans le plan de la plus petite diagonale, d'*environ* 55°.

» 10 *mai* 1833. J'essayai, dans la matinée, au moyen du photomètre comparateur, une lame rhomboïdale de spath calcaire nouvellement polie pour cet objet, et je l'enduisis à la seconde surface de la même manière que le premier rhomboïde. Cette pièce de spath avait été polie sur mon tour avec le plus grand soin, et légèrement creusée avec du fin oxide de fer préparé pour les miroirs.

Le ciel était couvert et très-favorable à l'emploi du photomètre.

Spath d'Islande, la plus courte diagonale dans le plan d'incidence.	*Incidence correspondante sur le crown glass.*
10°	25°5
10	25,3
57	61,8
57	61,5
57	61,9
57	61,7

La plus longue diagonale est dans le plan d'incidence.	*Incidence correspondante sur le crown glass.*
10°	24°5
10	25,7
57	59,2
57	59,8
57	60,0
57	59,8
57	60,0

» Ces derniers résultats s'accordent avec ceux obtenus sur une surface naturelle de spath, seulement en faisant la différence moindre. Je ne saurais tenir compte de la différence que je trouve moindre ici; ce qu'il y a de plus probable, c'est qu'elle provient de ce que la surface artificielle est libre de ces inégalités qui se trouvent toujours sur une surface naturelle, plutôt que de supposer qu'elle est due à une appréciation fautive de l'œil.

La grande différence dans les angles, sur le verre, qui correspondent à ceux de 5 et 10 degrés sur le spath, ne doit pas surprendre, car la réflexion sur le verre, de même que sur d'autres substances, varie très-peu à ces basses incidences, mais très rapidement dès que l'incidence augmente (1). »

Cambridge, le 18 décembre 1834.

ADRIEN ROMAIN ou VAN ROOMEN,

Chevalier, médecin de l'Empereur, etc., né à Louvain, le 29 septembre, mort le 4 mai 1615. (Notes communiquées par M. LE BARON DE REIFFENBERG.)

Tallemant des Réaux, qui a recueilli tant d'anecdotes et de médisances sur les personnages célèbres des seizième et dix-

(1) M. Potter reconnaît qu'il doit à sir David Brewster, l'idée des expériences dont il est parlé dans la lettre précédente.

septième siècles, n'a pas négligé la ville pour la cour, aussi curieux d'interroger la vie des savans et des gens de lettres, que celle des hommes de robe et d'épée, ou les faiblesses des grandes dames. Dans l'*historiette* qu'il consacre à *Viète*, il raconte, avec des détails nouveaux, une anecdote, dont on connaissait déjà le fonds et où figure un géomètre belge. A ce titre nous transcrirons ses paroles :

« M. *Viète* était un maître des requêtes, natif de Fontenay-» le-Comte, en Bas-Poitou. Jamais homme ne fut plus né aux » mathématiques ; il les apprit tout seul ; car, avant lui, il n'y » avait personne en France qui s'en mêlât. Il en fit même plu- » sieurs traités d'un si haut savoir, qu'on a eu bien de la peine » à les entendre, entre autres, son *Isagoge* ou *Introduction* » *aux Mathématiques*. Un *allemand* nommé *Landsbergius*, si je » ne me trompe, en déchiffra une partie, et depuis on a entendu » le reste. Voici ce que j'ai appris touchant ce grand homme. » Du temps d'Henri IV, un *hollandais* nommé *Adrianus Ro-* » *manus*, savant aux mathématiques, mais non tant qu'il » croyait, fit un livre où il mit une proposition qu'il donnait à » résoudre à tous les mathématiciens de l'Europe; or, en un en- » droit de son livre, il nommait tous les mathématiciens de » l'Europe, et n'en donnait pas un à la France. Il arriva, peu » de temps après, qu'un ambassadeur des États vint trouver le » roi à Fontainebleau. Le roi prit plaisir à lui en montrer toutes » les curiosités, et lui disait les gens excellens qu'il y avait en » chaque profession dans son royaume. — Mais, sire, lui dit » l'ambassadeur, vous n'avez point de mathématiciens, car » *Adrianus Romanus* n'en nomme pas un Français dans le cata- » logue qu'il en a fait. — Si fait, si fait, dit le roi, j'ai un » excellent homme. Qu'on m'aille quérir M. *Viète*. — M. *Viète* » avait suivi le conseil, il était à Fontainebleau ; il vient. L'am- » bassadeur avait envoyé chercher le livre d'*Adrianus Romanus*. » On montre la proposition à M. *Viète*, qui se met à une des » fenêtres de la galerie où ils étaient alors, et avant que le roi » en sortît, il écrivit deux solutions avec du crayon. Le soir, il » en envoya plusieurs à cet ambassadeur, et ajouta qu'il lui en

» donnerait tant qu'il lui plairait, car c'était une de ces propo-
» sitions dont les solutions sont infinies. L'ambassadeur envoie
» ces solutions à *Adrianus Romanus*, qui, sur l'heure, se pré-
» pare pour venir voir M. *Viète*. Arrivé à Paris, il trouva que
» M. *Viète* était allé à Fontenay. A Fontenay, on lui dit que
» M. *Viète* est à sa maison des champs. Il attend quelques jours
» et retourne le redemander, on lui dit qu'il était en ville. Il
» fait comme Apelles qui tira une ligne. Il laisse une proposi-
» tion; *Viète* résout cette proposition. Le *Hollandais* revient;
» on la lui donne, le voilà bien étonné; il prend son parti d'at-
» tendre jusqu'à l'heure du dîner. Le maître des requêtes revient:
» le *Hollandais* lui embrasse les genoux; M. *Viète*, tout hon-
» teux, le relève, lui fait un million d'amitiés; ils dînent en-
» semble et après il le mène dans son cabinet. *Adrianus* fut six
» semaines sans le pouvoir quitter. Un autre étranger nommé
» *Gattade* (*Marin Getkalde*), gentilhomme de Raguse, se fit
» faire résident de sa république en France, pour conférer avec
» M. *Viète*. *Viète* mourut jeune, car il se tua à force d'étudier. »

Ce récit d'un style simple et négligé, intéresse par le tableau qu'il présente de l'enthousiasme naïf de la science. Mais il s'y trouve plus d'une inexactitude. Ainsi, suivant l'usage ordinaire, on nous enlève encore nos hommes distingués pour en gratifier d'autres pays; et l'on fait un allemand de *Philippe Lansberg*, qui était de Gand. Cet habile géomètre n'a pas d'article dans la *Biographie Universelle*, non plus qu'*Adrien Romain* ou plutôt *Van Roomen* (1), qu'on a pris pour un allemand, dans cette vaste galerie, parce qu'il enseigna à Wurtzbourg et que *Tallemant* a cru Hollandais. La vérité est qu'il naquit à Louvain d'une famille

---

(1) Il paraît, en ce moment, un supplément à cette Biographie qui, malgré ses défauts, est encore et sera long-temps le meilleur ouvrage en ce genre. Malheureusement l'éditeur, de peur de multiplier les volumes et de lasser les souscripteurs, ne s'attache plus guère qu'à des personnages modernes, et laisse ainsi dans son ouvrage des lacunes qu'il eût été important de combler.

qui appartenait au *lignage patricien* de *Van Redingen* et qui portait pour armoiries, *d'or un chevron de gueules, accompagné en pointe d'un paon rouant de sinople* (1). Mais ces méprises sont si communes que M. Pichot vient encore tout récemment de nous enlever *André Vésale* pour le donner à l'Espagne (2).

Quant au livre auquel *Tallemant* fait allusion, c'est : *Ideæ Mathematicæ pars prima sive methodus polygonorum qua laterum, perimetrorum et arearum cujuscunque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima, una cum circuli quadratura continentur. Antwerpiæ, apud Joannem Keerbergium, anno* 1593, in-4° de 128 pages, sans les préliminaires, avec les armes de *Van Roomen* sur le titre (*Item, Lovanii, typis Masii*, 1593, in-4° (3).

Cet ouvrage est dédié au jésuite *Christophe Clavius*, de Bamberg, avec lequel *Viète* eut une dispute au sujet du calendrier : *Mathematico nostri seculi tum doctissimo tum celeberrimo*. L'auteur déclare, dans cette épître dédicatoire, qu'il étudia les principes des mathématiques chez les jésuites de Cologne et que *Ludolphe Van Collen* était le premier des arithméticiens passés et présens. La préface, précédée de quelques vers de *Juste Lipse*, de *Thomas Fienus* et de *Bernard Lordel*, contient effectivement une notice sur les géomètres contemporains. Il faut se ressouvenir que *Romanus* écrivait vers l'année 1590 (4). Voici ceux qu'il mentionne ; je traduirai ce qu'il dit des mathématiciens nés en Belgique.

---

(1) Petri Divæi opera, fol. p. 68 *Rerum Lovaniens.* — *Septem tribus patriciæ Lovaniensis*, 1754, in-12, pp. 28, 141.

(2) Ce n'est pas la seule faute que M. Pichot ait commise dans son conte intitulé *l'Autopsie*. Car, selon lui, Philippe II était roi en 1550 et Charles-Quint n'abdiqua qu'en 1555. Il place à la même année, l'arrestation de Vésale par l'inquisition, arrestation qu'on rapporte ordinairement à l'année 1563. Enfin il donna à Vésale 30 ans, à l'époque de l'autopsie du cadavre qu'on l'accusa d'avoir disséqué vivant; mais, en 1550, Vésale avait 36 ans et à la véritable époque 39.

(3) *Bibl. Belg.* I, 19.

(4) C'est la date du privilége délivré le 7 novembre 1590.

1. *Christophe Clavius*, déjà nommé.

2. *Gui Ubaldi.*

3. *Jean Antoine Magini* de Padoue.

4. *Jean Cornets Grotius*, grand musicien en même temps que mathématicien expert.

5. *Ludolf Van Collen* déjà nommé.

6. *Michel Cognet* « très-versé dans toutes les parties des mathé-
» matiques, comme le prouvent et le prouveront, tant ses ouvra-
» ges imprimés en diverses langues, que ceux qu'il a en manus-
» crit sur l'arithmétique, la géométrie, la stéréométrie, la
» géodésie et l'astronomie, ouvrages remplis d'un savoir singu-
» lier et qu'il a bien voulu me montrer quand j'allai le visiter à
» Anvers. Je passe sous silence ses belles mécaniques qui font
» l'admiration des connaisseurs. Je ne dis rien non plus de plu-
» sieurs horloges qu'il a construites pour la ville d'Anvers,
» d'après une théorie exposée dans un traité exprès. J'ajouterai
» seulement qu'il s'occupe avec ardeur de la recherche des mo-
» biles secondaires et que bientôt il présentera de nouveaux
» principes sur cette partie de la mécanique. »

7. *Nicolas Peetersen* « instruit de toutes les difficultés de
» l'arithmétique et de l'algèbre la plus transcendante. Son arith-
» métique écrite en flamand est entre les mains de tout le monde
» et a formé de bons et nombreux disciples. »

8. *Simon Stevin de Bruges* « a fait preuve dans les mathéma-
» tiques d'une capacité extraordinaire. Il a donné en français (1)
» un traité d'arithmétique, d'après une méthode excellente, et
» tel que si même on n'eût dû plus rien attendre de l'auteur, il
» aurait déjà rendu le plus grand service au public. Il y a pré-
» senté en effet, dans un ordre merveilleux et tout nouveau, les
» règles de l'arithmétique vulgaire et de l'arithmétique figurée,
» auxquelles il a joint des applications; il a éclairci Diophante,
» a renfermé dans quelques propositions tout le dixième livre

---

(1) Anvers, 1585, in-8°.

» d'Euclide qui roule sur les quantités incommensurables, et
» ajouté à son livre beaucoup d'autres détails aussi rares qu'in-
» structifs. Il s'occupe maintenant à rédiger, d'après la même
» méthode, une géométrie universelle, dont il a donné un
» échantillon dans ses *Cinq livres de problèmes géométriques*
» (*Problematum geometricorum liv. V*, 1583, *in*-4°). Ce n'était
» pas assez pour lui, car il a refait et éclairci une des plus im-
» portantes et des plus difficiles parties des mathématiques, je
» veux dire la statique, en l'appuyant sur des fondemens
» nouveaux, confirmés par une longue expérience, et il a publié
» son travail dans un flamand élégant et correct (langue qu'il
» dit avoir été la mère de toutes les autres) (Leyden, 1586 in-4°).
» A mon avis, il n'est rien de comparable à cet ouvrage. Le même
» savant est si exercé dans la science des poids, qu'il n'en est
» pas un, quelque lourd qu'il soit, qu'il ne remue avec des for-
» ces médiocres ou un instrument peu compliqué. Il a été chargé
» des constructions destinées à mettre la terre à l'abri des eaux,
» dans les cantons maritimes, et j'apprends qu'il s'acquitte de cet
» emploi à l'applaudissement et à l'admiration d'un chacun. »

9. *Ticho brahé.*

10. *Valentin Otton.*

Après ces hommes alors célèbres, il nomme quelques-uns de ses disciples et spécialement deux étudians en médecine, qui l'avaient aidé dans ses calculs, *Bernard Lordel* de Muysen (1) et *Jean Vanden Weege* de Boxtal. Il y joint *Thomas Fæsius* d'Anvers, *Corneil Opmeer* de Delft et les imprimeurs, qui, sans se livrer proprement à l'étude des mathématiques, en répandaient la connaissance par leurs publications, tels que *François Raphelengius, familier avec toutes les langues, non pas seulement de l'Europe, mais du monde entier; Jean Bellerus* (2) et *Jean Keerberg* d'Anvers, enfin *Jean Maes* de Louvain.

Cette préface intéressante est suivie du fameux problème ana-

---

(1) *Mosomensem.*

(2) J'ai inséré sa notice dans le tome LVII de la *Biographie Universelle*.

lytique, proposé à tous les savans de l'univers : *Problema mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum*, problême que Montucla a fait suffisamment connaître (1). *Adrien Van Roomen*, après l'avoir énoncé, ajoute qu'il ne doute pas que *Ludolf Van Collen* a en trouvé la solutiou, *saltem in numeris solinomiis*.

Il est de fait que dans tout ce qui précède, *Van Roomen* ne cite pas un français, et en ce point *Tallemant des Réaux* est exact.

Mais si *Viète* résolut facilement le problême de *Romanus*, celui-ci ne fut pas aussi heureux quand *Viète* lui posa ce problême : *trois cercles étant donnés, on en demande un quatrième qui les touche tous les trois*. Il est aussi à remarquer, que malgré son admiration pour *Viète* qui, dans la narration de *Tallemant*, ressemble à de l'idolâtrie, il parait se mettre sans façon au dessus de lui, dans la préface de sa trigonométrie, pendant qu'il enseignait à Augsbourg : *Canon triangulorum sphæricorum. Moguntiæ, typis Joan. Albini*, 1609, *in* 4°, car comparant sa méthode à celle du géomètre français, il ajoute : *Praxibus octo partim consimilibus, partim excellentioribus Vietam superavimus*.

---

(1) *Histoire des Math.* I, 609.

FIN DU HUITIÈME VOLUME.

TABLE GÉNÉRALE

DES MATIÈRES ET DES AUTEURS, POUR LES HUIT VOLUMES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

Nota. Les chiffres romains indiquent les volumes, et les chiffres arabes le numéro des articles. Les noms des auteurs qui ont donné des articles originaux à la *Correspondance*, sont marqués d'une astérisque.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

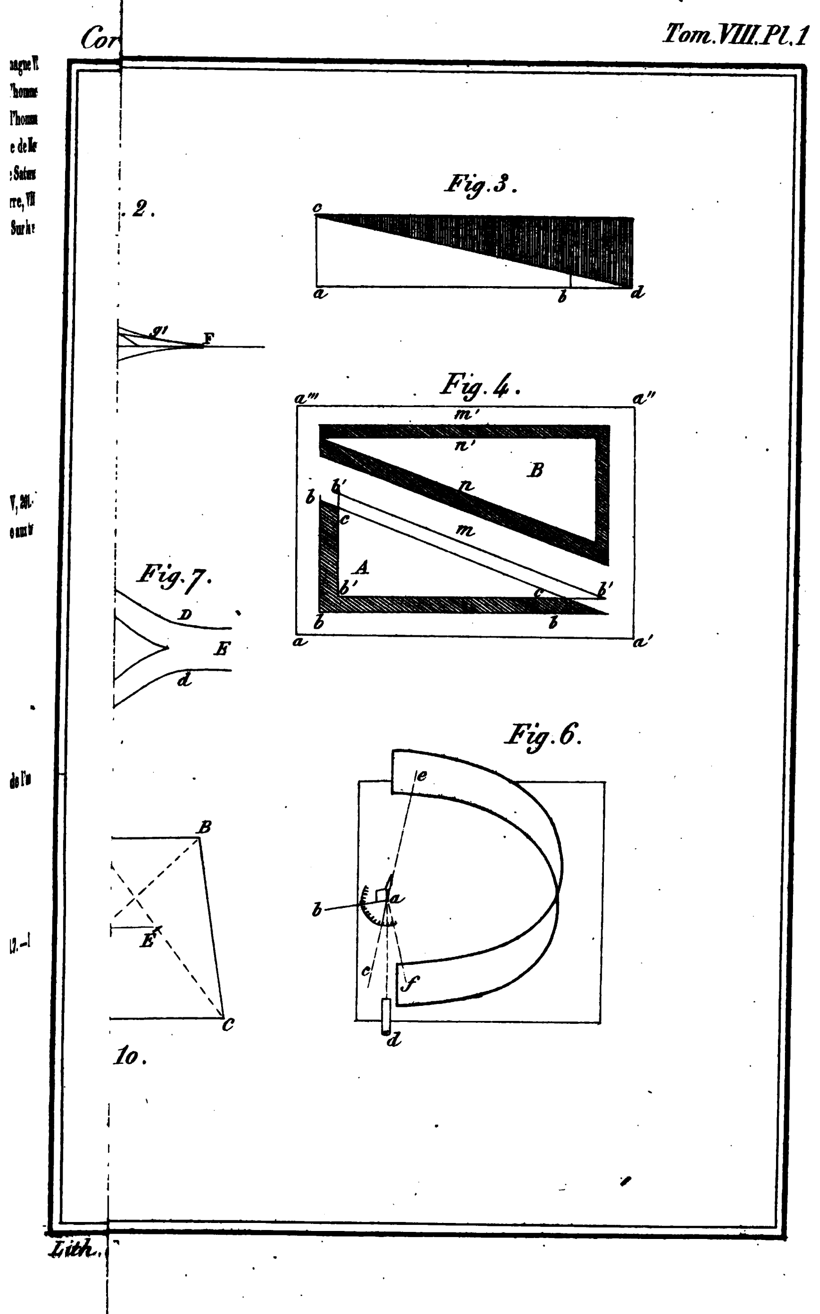
O.

P.

Q.

R.

S.


Tom.VIII.Pl.1
Fig.3.
c
a
b
d
Fig.4.
a'''
a''
m'
n'
B
n
b
b'
c
m
A
b'
c
b'
b
b
a
a'
Fig.7.
D
E
d
Fig.6.
e
b
a
c
f
d
B
E
C
10.
Lith.

es.

Mém. de M. Eug. Bouvard.

